

# 3

## TEORIA GIER

---

### 3.1. Wstęp

W rozdziale 2 dotyczącym wyboru w warunkach niepewności wypłata decydenta zależała od podjętej przez niego decyzji oraz od stanu świata, który zaszedł. Możemy to sobie wyobrażać jako tzw. grę z naturą, w której decydent wybiera jedno z dostępnych działań/akcji (np. wziąć parasol/nie brać parasola), a natura wybiera stan świata (deszcz pada/nie pada). Wtedy wypłata decydenta zależy od działań przez niego podjętych oraz od ruchu natury – tj. stanu świata, a dokładniej od kombinacji działań decydenta i stanów natury (jestem mokry, bo lunął deszcz, a ja nie wziąłem parasola; jestem suchy, gdyż schroniłem się przed deszczem pod parasolem; naderemnie noszę parasol, ponieważ dziś nie pada; nie wziąłem parasola, ale jestem suchy, ponieważ deszcz nie pada). Zakładamy, że natura „wybiera” stan świata niezależnie od preferencji decydenta oraz działania przez niego podjętego. Zaprzeczeniem tego założenia byłoby zaakceptowanie nierealistycznych możliwości w rodzaju istnienia wiecznych pechowców (gdy wezmę parasol, świeci ładne słońce, a gdy nie wezmę, leje jak z cebra) lub wiecznych szczęściarzy.

W niniejszym rozdziale miejsce natury zajmuje świadomy gracz. Analizować będziemy dwustronne decyzje, w których występuje strategiczna interakcja, tj. wypłata decydenta zależy od podjętej przez niego decyzji oraz od decyzji drugiego decydenta, przy czym decydemtem może być jakakolwiek samoświadoma jednostka, która jest zdolna do podjęcia określonego działania w celu osiągnięcia rezultatu zgodnego z jej preferencjami. Dział nauki, w której mieszczą się takie decyzje, to teoria gier.

Jako tzw. *dwuosobowe gry statyczne* rozważymy sytuacje decyzyjne, w których istnieją dwie strony (nazwiemy je graczami) podejmujące decyzje polegające na wyborze jednej spośród paru (przynajmniej dwóch) akcji dostępnych dla danej strony (powiemy strategii gracza), przy czym każda ze stron wybiera, nie wiedząc jakiego wyboru dokonała druga strona. Graczami mogą być dwie osoby w sensie dosłownym, ale

także na przykład dwie firmy lub dwa państwa. Wynik gry zależy od wyboru dokonanego przez obu graczy. Każdy z graczy umie określić swoje preferencje odnośnie do wszystkich możliwych wyników gry. Gry można sklasyfikować według poziomu zbieżności w ocenie atrakcyjności poszczególnych wyników pomiędzy graczami. Szczególnym rodzajem gier są gry, w których występuje całkowita rozbieżność interesów pomiędzy graczami (wynik, który podoba się najbardziej jednemu graczowi jest najgorszym wynikiem dla drugiego gracza). Takie gry, nazywane grami ściśle konkurencyjnymi, można analizować metodami ogólnej teorii gier, jednak ich szczególna matematyczna struktura umożliwia dokonanie pogłębionej analizy i użycia dodatkowych narzędzi, stąd będziemy analizowali je osobno w drugiej części rozdziału.

Do opisu sytuacji strategicznych będziemy używali terminologii zaczerpniętej z gier. Nie oznacza to jednak, że opisywane sytuacje są grami w sensie potocznym. Mogą to być bardzo poważne sytuacje opisujące konflikt geopolityczny, konkurencję firm na rynku oligopolistycznym, negocjacje z terrorystami, strategie przetrwania mrówek, preferencje randkowiczów lub problem wspólnego dowożenia dzieci do szkoły. Aby wyjaśnić wybór terminologii, posłużmy się wypowiedzią profesora Kena Binmore'a, jednego z wybitnych brytyjskich matematyków zajmujących się teorią gier:

*Racjonalne interakcje między ludźmi warte są studiowania, jednak dlaczego studia te nazwane są teorią gier? Dlaczego bagatelizujemy problemy, z którymi borykają się ludzie, nazywając je grami? Czy nie dewaluujemy naszego człowieczeństwa redukując ludzkie dążenie do spełnienia się do rangi zwykłej zabawy w grze? Teoretycy gier odpowiadają na tego typu pytania stawiając je na głowie. Im głębiej przeżywamy dane problemy, tym bardziej musimy uważać, aby nie dać się zwieść myśleniu życzeniowemu. Teoria gier czyni cnotę z użycia języka gier towarzyskich, takich jak szachy czy poker, ponieważ dzięki temu możemy dyskutować o logice strategicznych interakcji w sposób beznamiętny (Binmore, 2007b, s. 4).*

Układ niniejszego rozdziału jest następujący. W podrozdziale 3.2 przedstawimy przykład motywujący. Następnie, w podrozdziale 3.3, omówimy poszczególne elementy dwuosobowych gier statycznych. Wprowadzimy podstawowe definicje i założenia oraz wyjaśnimy, w jakim sensie gry można rozwiązywać. Podrozdział 3.4 jest poświęcony szczególnemu rodzajowi statycznych gier dwuosobowych, czyli gier ściśle konkurencyjnych. W podrozdziale 3.5 pokażemy, w jaki sposób wykorzystać arkusz kalkulacyjny programu Excel w celu znalezienia rozwiązania gier omawianych w poprzednich podrozdziałach. Podrozdział 3.6 jest przeznaczony na podsumowanie części podstawowej rozdziału. Kolejna część, podrozdział 3.7, zawiera dodatek, w którym postaramy się odpowiedzieć na pytanie, czy teoria gier dobrze przewiduje rzeczywiste zachowania ludzi w grach.

### 3.2. Konkurencja o rynek – przykład motywujący

Rozważmy przykład dwóch firm operujących na kilku rynkach. Pierwsza firma – Atena – kontroluje rynek A, natomiast druga firma – Zeus – kontroluje rynki B, C i D. Każda z firm może zdecydować się bronić jednego ze swoich rynków bądź zaatakować jeden z rynków przeciwnika. Decyzja jest podejmowana bez wiedzy, jaką decyzję podejmie przeciwnik. Jeśli jedna firma zaatakuje niebroniony rynek drugiej firmy, wówczas zdobywa ten rynek i przejmuje jego wartość. Jeśli zaatakuje broniony rynek drugiej firmy, wówczas przegrywa i musi się wycofać, odnosząc straty tym większe, im więcej warty był ten rynek. W Tabeli 3.1 zestawiono wartości poszczególnych rynków oraz straty w przypadku porażki (w jakiejś jednostce pieniężnej, np. setkach tysięcy PLN).

**Tabela 3.1**  
Wartości rynków i straty w przypadku przegranej

	Rynek A	Rynek B	Rynek C	Rynek D
Zysk w przypadku zdobycia niebronionego rynku	5	4	3	2
Strata w przypadku ataku na broniony rynek	4	3	2	1

*Źródło: opracowanie własne.*

Każda z firm może wybrać tylko jedną lokalizację, zatem każda firma ma cztery możliwe sposoby postępowania. Zakładamy, że zyski Ateny są równe stratom Zeusa (a straty Ateny są zyskami Zeusa). Na przykład, jeżeli Atena zdecyduje się bronić rynku A, a Zeus go zaatakuje, wówczas Atena wygrywa i jej wypłata wynosi 4, czyli tyle ile wynosi strata Zeusa. Jeżeli obie firmy będą bronić któregoś ze swoich rynków, ich zyski nie zmienią się, czyli wypłaty wyniosą 0. Jeżeli Atena zaatakuje rynek C, a Zeus zdecyduje się zaatakować rynek A, wypłata Ateny wynosi 3 (za przejęcie rynku C) minus 5 (za stratę rynku A), czyli w sumie  $-2$ . Jeżeli Atena zaatakuje rynek C, a Zeus zdecyduje się bronić ten sam rynek, jej strata wyniesie również  $-2$ . W Tabeli 3.2 przedstawiono wypłaty Ateny w zależności od swojego postępowania oraz postępowania Zeusa.

Czy menedżer Ateny powinien zaatakować któryś z rynków kontrolowanych przez Zeusa, czy też zdecydować się na obronę rynku A pozostającego pod jego kontrolą? Którego rynku powinien bronić Zeus? A może powinien zaatakować rynek A, który ma największą wartość? Czy może jest tak, że częścią optymalnej strategii firmy jest bycie nieprzewidywalnym? Jaką decyzję podejmie racjonalny menedżer Ateny? Jaką

decyzję podejmie racjonalny menedżer Zeusa? Jaki będzie ostateczny wynik tej gry? Czy da się wskazać oczekiwany zysk obu firm w sytuacji, kiedy obie grają optymalnie? Na te pytania odpowiemy pod koniec niniejszego rozdziału. Przedtem jednak wprowadzimy pojęcia, które są niezbędne do matematycznego modelowania tego typu sytuacji, w celu udzielenia precyzyjnych odpowiedzi na te pytania.

**Tabela 3.2**  
**Tabela wypłat gry Ateny**

		Strategia Zeusa			
		atakuję A	broni B	broni C	broni D
Strategia Ateny	broni A	4	0	0	0
	atakuję B	-1	-3	4	4
	atakuję C	-2	3	-2	3
	atakuję D	-3	2	2	-1

Źródło: opracowanie własne.

### 3.3. Statyczne gry dwuosobowe – przypadek ogólny

W tej części rozdziału wprowadzimy sytuacje wyborów strategicznych (gry) i na ich podstawie wyjaśnimy dwa ważne pojęcia: strategii zdominowanej (czyli strategii ewidentnie gorszej od jakiejś innej dostępnej) i równowagi w grze (spodziewanego rezultatu gry). Następnie postaramy się przekonać Czytelnika, że teoria gier, mimo swego żargonu, w którym mowa o maksymalizacji wypłat i wybieraniu strategii, potrafi opisywać dylematy zwykłych ludzi, którzy są pełni emocji i często cechują się empatią i współczuciem, a przy podejmowaniu decyzji kierują się nie tylko swoim wąsko pojmowanym interesem. Pokażemy dalej, co zrobić w przypadku istnienia wielu równowag w jednej grze (wiele możliwych rezultatów) – przedstawimy przykładowe metody wyboru równowagi na podstawie kryteriów efektywności Pareto oraz żalu (pojęcie żalu omówiono w rozdziale 2). Na koniec opowiemy o grach, w których opłaca się być nieprzewidywalnym – mowa będzie o równowadze w strategiach mieszanych i o słynnym twierdzeniu, że każda gra o skończonej liczbie strategii i graczy posiada równowagę.

Zacznijmy od wprowadzenia w sposób formalny pojęcia gier, którymi zajmować się będziemy w tym rozdziale.

### Jakimi grami będziemy się zajmować

#### Elementy gry

- Opis każdej gry rozpoczynamy od wskazania **dwóch graczy**.
- Następnie sporządzamy listę dostępnych dla każdego gracza **akcji/strategii**.
- Opisując grę, musimy wyrazić, jakie są preferencje gracza względem możliwych wyników, tj. kombinacji wybranych strategii (tzw. profili strategii). Robimy to, przypisując tym kombinacjom liczby, tzw. **wypłaty**, interpretowane jako użyteczności. O funkcji użyteczności pisaliśmy w rozdziale 2, tu konsekwentnie zakładamy, że gracze chcą maksymalizować oczekiwaną użyteczność swojej decyzji.

#### Dobór strategii

- Każdy z graczy musi mieć kontrolę nad swoimi działaniami, czyli musi być w stanie wybrać, jeżeli zechce, każdą z listy dostępnych sobie strategii.
- Lista akcji każdego gracza musi właściwie różnicować profile strategii ze względu na wypłaty graczy.
  - Jeżeli np. obu graczom zależy tylko na tym, aby nie zmoknąć, wybór zielonego lub czerwonego parasola przez jednego z nich powinien być uwzględniony nie jako dwie, ale jako tylko jedna jego akcja. Z kolei, jeżeli wypłata któregoś z graczy zależy od koloru parasola wybranego przez jednego z nich, wówczas ten wybór powinien być rozbity na dwie akcje tego gracza.

#### Opis gry

- Grę standardowo przedstawiać będziemy w formie tabeli.
- Wygodnie jest ustalić konwencję, według której jeden gracz, zwany Wierszem, wybiera jedną ze swoich strategii (czyli wierszy tabeli) i jednocześnie drugi gracz, zwany Kolumną, wybiera jedną ze swoich strategii (czyli kolumn tabeli).
- Na przecięciu odpowiedniego wiersza i odpowiedniej kolumny tabeli zapisujemy parę wypłat obu graczy dla danego profilu strategii, przy czym wypłata Wiersza jest pierwszą w parze.

#### Założenia

- Każdy z graczy wybiera tylko jedną z dostępnych sobie akcji, nie wiedząc w momencie wyboru, jaką decyzję podjął przeciwnik. To znaczy, że decyzje przeciwnych stron mogą być podejmowane w odstępie czasowym, o ile w międzyczasie nie przepłynie informacja do jednego gracza dotycząca wyboru drugiego.
- Wszystkie elementy gry są znane obu graczom, a zatem każdy wie, ilu jest graczy, jakie decyzje ma do wyboru zarówno on sam, jak i jego przeciwnik, oraz wie, jakie są wypłaty zarówno jego, jak i przeciwnika w każdej kombinacji decyzji podjętej przez obu graczy.
- Gracze postępują racjonalnie, tj. dążą w sposób spójny i logiczny do maksymalizacji swojej wypłaty. Co więcej, zakładamy, że racjonalność graczy i znajomość wszystkich elementów gry jest wiedzą powszechnie wiadomą (*common knowledge of rationality*), tj. Wiersz i Kolumna są racjonalni i znają wszystkie elementy gry.
  - Wiersz wie, że Kolumna jest racjonalna i że zna wszystkie elementy gry. Kolumna wie, że Wiersz jest racjonalny i że zna wszystkie elementy gry.
  - Wiersz wie, że Kolumna wie, że Wiersz jest racjonalny i że zna wszystkie elementy gry, a Kolumna wie, że Wiersz wie, że Kolumna jest racjonalna i że zna wszystkie elementy gry.
  - Taki ciąg można kontynuować w nieskończoność – i to właśnie nazywamy wiedzą ogólnie wiadomą.

### 3.3.1. Równowaga gry i strategie ściśle dominujące

Pierwsza gra

Jako pierwszy przykład rozważmy grę pomiędzy dwiema firmami: dużą i uznaną firmą Big oraz małą i nieznaną firmą Small. Obie firmy mają do wyboru zaangażować się w projekt (Z) albo nie (NZ). Jeżeli Big wybierze strategię Z, to projekt na pewno zakończy się sukcesem, z czego skorzystają obie firmy, przy czym Small skorzysta więcej niż Big, jeżeli również wybierze Z, albo mniej, jeżeli wybierze NZ. Z kolei jeżeli Big wybierze strategię NZ, wówczas projekt zakończy się niepowodzeniem i będzie lepiej dla Small, aby również wybrała NZ. Jeżeli obie firmy wybiorą strategię NZ, Big dodatkowo na tym straci. Obie firmy muszą podjąć decyzje niezależnie od siebie, tj. bez znajomości decyzji przeciwnika (czyli jednocześnie). Tabela 3.3 zawiera wypłaty w grze (zyski firm) w zależności od wybranych par strategii.

Tabela 3.3

Wypłaty w grze pomiędzy firmą Big i Small (firma Big wybiera wiersz, firma Small – kolumnę; pary liczb oznaczają zysk kolejno: firmy Big i firmy Small)

	Z	NZ
Z	(100, 200)	(200, 100)
NZ	(0, -100)	(-100, 0)

Źródło: opracowanie własne.

Porównajmy zyski firmy Big w przypadku wybrania jednej z dwóch jej strategii. Rozważmy dwa przypadki:

- firma Small wybiera kolumnę Z: wówczas zyski firmy Big wyniosą 100, jeśli wybierze wiersz Z lub 0, jeśli wybierze NZ;
- firma Small wybiera kolumnę NZ: wówczas zyski firmy Big wyniosą 200, jeśli wybierze wiersz Z lub -100, jeśli wybierze NZ.

W obu przypadkach strategia Z okazuje się lepsza dla firmy Big. W żargonie teorii gier mówimy, że dla Wiersza strategia Z ściśle dominuje strategię NZ.

Strategie dominujące

Strategia X ściśle dominuje strategię Y danego gracza, jeżeli niezależnie od tego, jaką strategię wybierze przeciwnik, wypłata rozważanego gracza jest większa dla strategii X niż dla strategii Y (jeżeli jest zawsze nie mniejsza, a czasem większa, to mówimy, że X słabo dominuje Y). Jeżeli strategia X ściśle dominuje dowolną inną strategię Y, mówimy, że X jest ściśle dominującą, a Y ściśle zdominowana.

W konsekwencji ścisłej dominacji, firma Big powinna wybrać Z niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik. Z kolei firma Small, wiedząc, że Big wybierze Z, powinna również wybrać Z (zysk wynosi 200, jeżeli wybierze Z, w porównaniu do 100 dla NZ). Zauważmy różnicę: firma Big powinna wybrać Z niezależnie od decyzji konkurenta;

firma Small powinna wybrać Z, jedynie wtedy, gdy firma Big wybierze Z. Firma Small wybierając więc Z, musi wiedzieć, że firma Big zachowa się racjonalnie.

Profil strategii (Z, Z), który wskazaliśmy jako ten, który powinien być zagrany, nazywany jest *równowagą tej gry*, a strategia Z firmy Big i strategia Z firmy Small nazywane są *strategiami równowagi*.

Równowaga (w strategiach czystych) w grze to jest para (profil) strategii (X, Y), gdzie X jest strategią Wiersza, a Y jest strategią Kolumny, taka, że wybór X daje Wierszowi najwyższą wypłatę pod warunkiem, że Kolumna wybierze Y, a wybór Y daje Kolumnie najwyższą wypłatę pod warunkiem, że Wiersz wybierze X. Parę (X, Y) nazywamy również *wzajemnie najlepszymi odpowiedziami*.

Sprawdźmy teraz, że profil (Z, Z) jest równowagą. Jeżeli firma Big wybierze strategię Z, to firmie Small nie opłaca się zmienić swojej strategii z Z na NZ, ponieważ zamiast zysku w wysokości 200, jej zysk wyniósłby wówczas zaledwie 100. Z kolei jeżeli Small wybierze strategię Z, to Big nie opłaca się zmienić swojej strategii Z na NZ (zamiast 100 zysk byłby zerowy). Zatem rzeczywiście, profil strategii (Z, Z) jest równowagą gry, a parę (100, 200) trafnie nazywamy profilem wypłat tej równowagi.

Zauważmy, że w równowadze firma Small otrzymuje wyższą wypłatę niż firma Big. Zatem Big może być niezadowolona, że firma Small nie wybrała strategii NZ, ponieważ wówczas to ona, firma Big, miałaby przewagę. Teoretycznie Big mogłaby postąpić złośliwie, tj. poświęcić część swoich zysków i wybrać strategię NZ, wiedząc, że firma Small wybiera w równowadze Z. W takiej sytuacji Big miałaby zerową wypłatę, ale wyszłaby na tym lepiej niż Small, która odniosłaby stratę w wysokości 100. Jednak NZ nie jest strategią równowagi firmy Big. Istotne jest tutaj założenie, że wypłaty graczy odzwierciedlają w pełni ich preferencje.

Przyjeliśmy w omawianym przykładzie, że zyski firm bezpośrednio przekładają się na wypłaty i np. jednej firmy nie interesuje zysk drugiej firmy. Gdybyśmy założyli, że firma Big troszczy się również o względną pozycję obu firm (która z nich wypadnie lepiej na tle przeciwnika), wówczas musielibyśmy zmodyfikować tabelę wypłat tej gry, odzwierciedlając w wypłatach, ile firma Big skłonna byłaby zapłacić (zredukować bezwzględny zysk), żeby zarobić więcej od Small (zwiększyć względny zysk). Jeżeli np. firma Big skłonna byłaby zapłacić 120, żeby mieć wyższy zysk od konkurenta, wówczas chętnie zgodziłaby się na zamianę profilu strategii (Z, Z) na (NZ, Z), gdyż jej zysk w pierwszym profilu nie rekompensuje jej straty wynikającej z gorszego wyniku niż konkurent. Wówczas profil (Z, Z) nie byłby już równowagą tej zmodyfikowanej gry.

Pojęcie równowagi jest przypisywane słynnemu matematykowi Johnowi Nashowi, którego Czytelnik może znać chociażby ze słynnego filmu z 2001 r. „*A beautiful mind*” w reżyserii Rona Howarda, stąd mówi się również równowaga Nasha. Film polecamy ze względu na świetne przedstawienie trudnego, ale ciekawego życia Johna Nasha,

.....  
Równowaga

.....  
Przykład  
z filmu  
Piękny umysł



jednak odradzamy czerpania z niego inspiracji na temat teorii gier. W filmie tym jest przedstawiona następująca ilustracja słynnej koncepcji Nasha.

Nash i jego trzech mężczyźni przyjaciele znajdują się w barze. Nagle pojawia się pięć kobiet: blondynka, która na wszystkich mężczyznach robi największe wrażenie, i cztery brunetki. Każdy chciałby podejść do blondynki, aby ją poderwać. Nash argumentuje, że jeżeli wszyscy podejść do blondynki, to się nawzajem zablokują i nikt jej nie zdobędzie. Jeżeli następnie podejść do jej koleżanek – brunetek – wówczas one również dadzą im kosza, żadna przecież nie będzie chciała być wybrana w zastępstwie. Jeżeli jednak zamiast do blondynki mężczyźni podejść każdy do innej brunetki, wówczas nie wejdą sobie w drogę i nie obrażą innych dziewcząt. Nash konkluduje, że tylko wówczas mężczyźni mogą wyjść z sytuacji zwycięsko.

Łatwo sprawdzić, że przedstawiona strategia nie jest równowagą. Jeżeli bowiem, trzech kolegów Nasha skorzysta z jego rekomendacji i zdecyduje podejść każdy do jednej z czterech brunetek, wówczas Nashowi wcale nie będzie opłacało się podejść do pozostałej – czwartej – brunetki. Zrobi lepiej, jeżeli podejść do blondynki. Będzie wówczas jedynym, który do niej podejść, zatem nie wejdzie nikomu w drogę. Takie rozwiązanie, tj. Nash podchodzi do blondynki, a pozostali podchodzą każdy do innej brunetki, jest jedną z równowag w tej grze. Nie opłaca się bowiem nikomu z mężczyzn zmienić swojej decyzji jednostronnie na inną. Być może w filmie Nash liczył na to, że przekona kolegów, że nie warto rywalizować o blondynkę. Wówczas miałby ją wyłącznie dla siebie. Byłoby to przekonujące wyjaśnienie, gdyby nie to, że po wygłoszeniu swojego argumentu Nash udaje się do swojego biurka, aby spisać swój pomysł.

.....  
Druga gra:  
Dylemat  
więźnia

Rozważmy kolejny przykład gry, tzw. dylemat więźnia<sup>1</sup>. Teraz przyjmijmy, że firmy Smart i Smarter konkurują na rynku smartfonów. Każda z firm może utrzymać wysokie ceny albo je obniżyć. Jeśli obie firmy utrzymają wysokie ceny, uzyskają zysk równy 500 mln USD każda. Jeśli tylko jedna firma (Smart bądź Smarter) obniży cenę, to powiększy swój udział w rynku i osiągnie zysk 750 mln USD, podczas gdy druga firma odnotuje zysk zerowy. Jeśli obie firmy zdecydują się obniżyć ceny jednocześnie, to żadna z nich nie powiększy swojego udziału w rynku, a zysk każdej zmniejszy się do 250 mln USD. Omawianą sytuację przedstawiono w Tabeli 3.4.

<sup>1</sup> Gra została po raz pierwszy sformułowana przez Merilla Flooda oraz Melvina Dreshera podczas ich pracy w RAND w 1950 r. Albert W. Tucker sformalizował tę grę jako grę pomiędzy dwoma członkami gangu kryminalnego, którzy zostali aresztowani i zamknięci w więzieniu. Każdy z nich niezależnie dostaje ofertę od prokuratora i bez możliwości komunikacji z drugim musi wybrać, czy chce wydać kolegę (wtedy albo dostaje wyrok dwóch lat więzienia, jeżeli kolega również zdecyduje się go wydać albo – w przeciwnym wypadku – wychodzi na wolność bez konieczności odbycia jakiegokolwiek kary), czy też pozostać lojalnym (wtedy albo dostaje wyrok roku, jeżeli kolega również jest lojalny względem niego lub trzy lata, jeżeli kolega go wyda).



Tabela 3.4

Wyплаты w grze dylemat więźnia pomiędzy firmą Smart i Smarter (Smart wybiera wiersz, Smarter – kolumnę; pary liczb w tabeli oznaczają zysk kolejno: firmy Smart i firmy Smarter)

	pozostawić (P)	obniżyć (O)
pozostawić (P)	(500, 500)	(0, 750)
obniżyć (O)	(750, 0)	(250, 250)

Źródło: opracowanie własne.

Porównajmy zyski firmy Smart w przypadku wybrania przez nią strategii O i w przypadku wybrania strategii P. Rozważmy dwa przypadki.

- Smarter wybiera kolumnę P: wówczas zyski Smarta wyniosą 750, jeśli wybierze wiersz O, i 500, jeśli wybierze P.
- Smarter wybiera kolumnę O: wówczas zyski Smarta wyniosą 250, jeśli wybierze wiersz O, i 0, jeśli wybierze P.

W obu przypadkach strategia O okazuje się lepsza dla firmy Smart niż strategia P. A zatem podobnie jak we wcześniejszym przykładzie w przypadku Wiersza strategia O ściśle dominuje strategię P.

Odwróćmy teraz sytuację i porównajmy zyski firmy Smarter w przypadku wybrania przez nią strategii O i w przypadku wybrania strategii P. Rozważmy dwa przypadki.

- Smart wybiera wiersz P: wówczas zyski firmy Smarter wyniosą 750, jeśli wybierze wiersz O, i 500, jeśli wybierze P.
- Smart wybiera wiersz O: wówczas zyski firmy Smarter wyniosą 250, jeśli wybierze wiersz O, i 0, jeśli wybierze P.

W obu przypadkach strategia O firmy Smarter okazuje się jednoznacznie lepsza niż strategia P, a zatem mówimy, że dla firmy Smarter strategia O ściśle dominuje strategię P. Zatem, przy założeniu, że obaj gracze będą starali się maksymalizować swoje zyski, dochodzimy do wniosku, że obaj powinni obniżyć cenę. Czytelnik łatwo zweryfikuje, że profil strategii (O, O) jest równowagą tej gry. Stosując terminologię teorii gier, mówimy, że para strategii (O, O) jest równowagą w strategiach ściśle dominujących.

Równowaga w strategiach ściśle dominujących to równowaga, w której strategię równowagi obu graczy ściśle dominują pozostałe ich strategie.

Jednak łatwo zauważyć, że wybór tych strategii prowadzi do gorszej wypłaty dla obu graczy niż w przypadku, kiedy żaden z graczy nie obniży swojej ceny. Jest to przykład takiej interakcji dwóch stron, który – przy racjonalnym zachowaniu obu – prowadzi do sytuacji niekorzystnej dla każdego (nie zyskują udziału w rynku, ale tracą na obniżeniu ceny produktów), tj. istnieje profil strategii, w którym obu graczom byłoby lepiej (gdy obaj gracze wybierają strategię P).

.....  
Równowaga  
w Strate-  
giach ściśle  
dominują-  
cych

### 3.3.2. Czy Teoria Gier zakłada Egoizm?

Ktoś mógłby zaprotestować, widząc wynik omawianej gry i powiedzieć, że teoria gier zakłada skrajny egoizm graczy, podczas gdy w rzeczywistości gracze nie myślą wyłącznie o sobie, ale starają się kooperować, aby wspólnie uzyskać profit. Są dwie odpowiedzi na taki zarzut.

Po pierwsze, wypłaty w przytoczonym przykładzie są pieniężne, a decydent faktycznie w tym przykładzie je maksymalizuje. Tymczasem ogólny model dopuszcza wypłaty niebędące tożsame z zyskiem, lecz określone w inny sposób przez preferencje. Te zaś mogą zależeć od innych aspektów, w tym także od aspektów moralnych. Na przykład, gdyby gracze umówili się, że nie będą obniżać ceny, to jeśli któryś z nich obniży, a drugi nie, wówczas ten pierwszy może mieć wyrzuty sumienia odzwierciedlone w wypłatach. Preferencje Smarta mogą zależeć nie tylko od własnego zysku, ale również od wielkości zysku firmy Smarter. Zależność może być ujemna: dla strategii (O, P) (Smart obniża ceny, a Smarter pozostawia je na niezmienionym poziomie) Smart może czuć satysfakcję z wysokiego zysku i dodatkową satysfakcję, że Smarter relatywnie dużo stracił w stosunku do Smarta. Może być też odwrotnie: Smart może czuć wyrzuty sumienia (lub, jeśli ktoś woli, empatię), że Smarter przez swoje zaufanie dużo stracił w stosunku do Smarta. Nawet jeśli wypłaty graczy będą oparte na preferencjach (reprezentowanych przez funkcję użyteczności), to łatwo sobie wyobrazić, że sytuacje strategiczne podobne do tej zaprezentowanej w Tabeli 3.4 mogą występować. Warunkiem jest to, że Smart i Smarter mają następujący ranking preferencji (w kolejności od najbardziej preferowanej sytuacji do najmniej preferowanej: profil 1  $\succ$  profil 2 oznacza, że profil 1 jest ściśle preferowany przez danego gracza nad profilem 2):

- ranking Smarta: (O, P)  $\succ$  (P, P)  $\succ$  (O, O)  $\succ$  (P, O),
- ranking Smartera: (P, O)  $\succ$  (P, P)  $\succ$  (O, O)  $\succ$  (O, P).

Możemy zbudować różne funkcje użyteczności (patrz podrozdział 2.3.4) graczy, które będą reprezentować te rankingi. Aby funkcje użyteczności firmy Smart,  $u_A$ , i Smarter,  $u_S$ , reprezentowały powyższe rankingi, muszą być spełnione warunki:

$$u_A(O, P) > u_A(P, P) > u_A(O, O) > u_A(P, O),$$

$$u_S(P, O) > u_S(P, P) > u_S(O, O) > u_S(O, P).$$

Teoria gier nie zakłada zatem, że decydentów interesuje jedynie zysk. Zakłada jedynie, że decydenci postępują zgodnie z własnymi preferencjami odzwierciedlonymi w wypłatach oraz że każdy z decydentów tego samego oczekuje od swojego przeciwnika. Gracze starają się doprowadzić do sytuacji, która jest dla nich preferowana. Dodatkowo gracze wiedzą, że ich przeciwnik stara się doprowadzić do preferowanej

przez siebie sytuacji. Gracze wiedzą także, że ich przeciwnik wie o ich staraniach itd. W sytuacji opisanej powyżej problem nieefektywności rozwiązania (obaj gracze obniżają cenę i ich zysk wynosi tylko po 250 milionów, podczas gdy mógłby wynosić po 500 milionów, gdyby ze sobą kooperowali i nie obniżali cen) występuje ze względu na specyficzny układ preferencji, w której profile strategii (O, P) i (P, O) są skrajnie różnie oceniane przez decydentów.

Drugą odpowiedzią na zarzut, że teoria gier nie ma odzwierciedlenia w procesach zachodzących w rzeczywistych sytuacjach jest to, że oprócz dylematu więźnia przedstawionego w Tabeli 3.4 istnieją też inne sytuacje strategiczne dotyczące koordynacji, w których możliwa jest kooperacja. Aby tę sytuację zilustrować rozważmy kolejny przykład.

Dwóch pracowników, Wojtek (Pan Wiersz) i Krysia (Pani Kolumna), pracuje nad wspólnym projektem. Każdy z nich może albo rzetelnie pracować nad projektem (P) albo pozorować wysiłek i tylko udawać, że pracuje (U). Jeśli oboje będą rzetelnie pracować, projekt się powiedzie, co oznacza, że obaj otrzymają premię równą 3 tys. EUR. Jeśli tylko jeden pracownik będzie pracował, a drugi będzie tylko udawał lub jeśli obaj pracownicy będą udawać, projekt się nie powiedzie i obaj nie otrzymają premii. Staranność w pracy przy projekcie wymaga wysiłku, stąd ten, kto pracuje, ponosi koszt równoważny 1 tys. EUR (np. gdyby nie pracował, mógłby wykonywać inne prace przynoszące wynagrodzenie). Sytuację tę przedstawiono jako grę (Tabela 3.5).

.....  
Trzecia gra:  
Gra koordynacyjna

**Tabela 3.5**

**Tabela wypłat gry dwóch pracowników pracujących nad wspólnym projektem**

	Pracować (P)	Udawać (U)
Pracować (P)	(2, 2)	(-1, 0)
Udawać (U)	(0, -1)	(0, 0)

Źródło: opracowanie własne.

Na czym polega w tej sytuacji problem Wojtka? Jeśli będzie pracował, to ponieś koszt wyceniony na 1 tys. EUR. Jeśli Krysia również będzie pracowała, to Wojtek otrzyma premię w wysokości 3 tys. EUR, co razem da zysk w wysokości 2 tys. EUR. Jeśli natomiast Krysia będzie udawała, to premii nie będzie, a Wojtek ponieś koszt pracy w wysokości 1 tys. EUR. Jeśli z kolei Wojtek będzie pozorował pracę, to nie ponieś wysiłku związanego z pracą, ale również może być pewny, że nie otrzyma premii. Zauważmy, że problem Wojtka nie jest jednoznaczny, jak w przypadku dylematu więźnia rozpatrywanego poprzednio. Żadna ze strategii nie dominuje pozostałej. Jeśli Krysia pracuje, to Wojtkowi również opłaca się pracować. Jeśli natomiast Krysia udaje, Wojtkowi również opłaca się udawać.

Równowaga  
bez strategii  
dominują-  
cych

Rozważmy profil strategii (P, P). Zauważmy, że żadnemu graczowi nie opłaca się jednostronnie odstąpić od swojej strategii. Jeśli Krysia pracuje, Wojtkowi również opłaca się pracować. Mówimy wówczas, że strategia P Wojtka jest najlepszą odpowiedzią na strategię P Krysi. I odwrotnie, jeśli Wojtek pracuje, Krysi również opłaca się pracować. Mówimy, że strategia P Krysi jest najlepszą odpowiedzią na strategię P Wojtka. A zatem profil strategii (P, P) stanowi *wzajemnie najlepsze odpowiedzi* graczy i mówimy, że jest to równowaga gry. Okazuje się, że teoria gier w tej sytuacji przewiduje kooperację graczy, która jest dla nich najlepszym możliwym rozwiązaniem. Jest to możliwe dzięki temu, że występuje pewna zbieżność interesów obu graczy, tj. w rankingu preferencji graczy profil (P, P) występuje na najwyższym miejscu dla obu graczy. Jednak zauważmy, że zbieżność interesów dwóch pracowników nie jest idealna. Ranking preferencji obu graczy jest następujący:

- ranking Wojtka:  $(P, P) \succ (U, P) \sim (U, U) \succ (P, U)$ ,
- ranking Krysi:  $(P, P) \succ (P, U) \sim (U, U) \succ (U, P)$ .

Rozważmy teraz profil strategii (U, U). Jeśli Krysia udaje, najlepszą odpowiedzią Wojtka jest również udawać. I odwrotnie, jeśli Wojtek udaje, najlepszą odpowiedzią Krysi jest także udawać. A zatem profil (U, U) również jest profilem wzajemnie najlepszych odpowiedzi graczy, a zatem również jest równowagą.

Jak  
znajdować  
równowagę?

Powyższa analiza służy sprawdzeniu, czy dany profil strategii jest równowagą. Nie mówi jednak, w jaki sposób szukać równowag spośród wszystkich profili strategii w grze, chyba że chcielibyśmy sprawdzać każdy profil strategii oddzielnie, co byłoby czasochłonne, szczególnie dla gier z większą liczbą strategii graczy. Istnieje jednak prosta procedura znajdowania równowagi w grach. Polega ona na tym, że identyfikuje się najlepsze odpowiedzi jednego gracza na konkretne strategie drugiego gracza. I tak najlepszą odpowiedzią Wiersza na strategię P Kolumny jest P, a na strategię U Kolumny jest U. Fakt ten jest reprezentowany poprzez podkreślenie odpowiedniej liczby oznaczającej wypłatę Wiersza w odpowiedniej kolumnie. Z kolei najlepszą odpowiedzią Kolumny na strategię P Wiersza jest P, a na strategię U Wiersza jest U. Fakt ten jest reprezentowany poprzez podkreślenie odpowiedniej liczby oznaczającej wypłatę Kolumny w odpowiednim wierszu. Zauważmy, że profile strategii (P, P) oraz (U, U) zgadzają się w tym sensie, że na przykład P jest najlepszą odpowiedzią Wiersza na strategię P Kolumny i odwrotnie P jest najlepszą odpowiedzią Kolumny na strategię P Wiersza. Jest to pokazane w Tabeli 3.5, w której wypłaty profilu strategii (P, P) oraz (U, U) są obie podkreślone, co oznacza, że są dla siebie wzajemnie najlepszymi odpowiedziami. Są to zatem równowagi. Profile (P, U) oraz (U, P) nie są równowagami, ponieważ nie są najlepszymi odpowiedziami na siebie nawzajem.

### 3.3.3. Problem Selekcji jednej z wielu równowag?

Równowagi mają tę własność, że są stabilne, tj. jeżeli obaj gracze grają strategię danej równowagi, to żadnemu nie opłaca się od niej jednostronnie odstąpić. Zatem mówiąc kolokwialnie, jeśli już jesteśmy w równowadze, to nie istnieje presja na żadnego gracza z osobna, aby od takiej strategii odstąpić. Jednak w sytuacji, gdy w grze jest wiele równowag, z uwagi na fakt, że decyzje każdego z graczy są niezależne od siebie i dany gracz nie zna decyzji drugiego przy podejmowaniu własnej, może dojść do sytuacji, w której jeden z graczy wybierze strategię jednej równowagi, a drugi gracz – strategię drugiej równowagi i w efekcie żadna z nich nie zostanie osiągnięta. Na przykład w grze przedstawionej w Tabeli 3.5 Wiersz może grać strategię P, która jest jego strategią w równowadze (P, P), a Kolumna może grać strategię U, która jest jej strategią w równowadze (U, U). Jednak profil rzeczywiście zagranych strategii (P, U) nie jest równowagą i każdemu z graczy opłacałoby się *ex post* jednostronnie zmienić swoją decyzję, aby doprowadzić do równowagi.

Jeśli może istnieć więcej niż jedna równowaga, powstaje pytanie, czy któraś z równowag rzeczywiście będzie realizowana, a jeśli tak – to która. Dodatkowo chcielibyśmy wiedzieć, na jakiej zasadzie odbywać się ma selekcja równowagi? Niestety nie istnieje jednoznaczny sposób odpowiedzi na to pytanie. Jego istotą jest bowiem konieczność wyboru ze zbioru wariantów przy dwóch kryteriach oceny, które reprezentują użyteczności obu graczy (wybór wielokryterialny). W teorii decyzji wielokryterialnych, przy naturalnych tu założeniach, selekcja jednej z wielu równowag może być wynikiem procesu decyzyjnego, jeśli wprowadzimy odpowiednio sposób porównywania par użyteczności. Jest wiele takich sposobów rekomendowanych przez mniej lub bardziej intuicyjne interpretacje. Podejścia najbardziej znane w kontekście teorii gier omówimy poniżej.

Jedno z podejść wykorzystuje kryterium oparte na efektywności. Równowaga jako profil strategii, które są najlepszymi odpowiedziami na siebie nawzajem, reprezentuje rodzaj indywidualnej racjonalności graczy. Jeżeli występuje więcej niż jedna równowaga, tak jak profile (U, U) i (P, P) w grze koordynacyjnej przedstawionej w Tabeli 3.5, potrzebne jest dodatkowe kryterium wyboru między nimi. Z punktu widzenia kolektywnej racjonalności (tj. obu graczy jako jednego podmiotu) naturalnym kryterium, czy dana równowaga jest lepsza, czy gorsza, jest tzw. *dominacja w sensie Pareto*.

Jeden profil strategii graczy dominuje drugi w sensie Pareto, jeżeli w jednym profilu wypłata jednego z graczy jest wyższa niż w drugim profilu, a zarazem wypłata drugiego gracza nie jest niższa.

Równowaga (U, U) charakteryzuje się profilem wypłat (0, 0), natomiast równowaga (P, P) charakteryzuje się profilem wypłat (2, 2). A zatem (P, P) dominuje (U, U)

.....  
Dominacja  
Pareto

w sensie Pareto. Dominacja w sensie Pareto pomaga ocenić, która równowaga jest jednoznacznie lepsza od drugiej. Czasem jednak w sytuacji, kiedy istnieje wiele równowag, nie da się wskazać tej jednoznacznie lepszej. Na przykład profil wypłat w jednej równowadze może wynosić (2, 1), podczas, gdy w drugiej wynosi (1, 2); nie da się wskazać dominacji w sensie Pareto, ponieważ jeden profil jest lepszy dla jednego gracza, a drugi dla drugiego. Dominacja Pareto jest sposobem porównywania różnych profili wypłat graczy według kryterium efektywności, które wykracza poza partykularne interesy obu graczy. Zgodnie z tym kryterium można porównać jedynie te profile wypłat, które są jednoznacznie lepsze lub gorsze od innych.

.....  
Focal points

Drugie podejście służące do wyboru jednej z wielu równowag zachodzących w grze to koncepcja tzw. *punktów ogniskowych* (*focal points*) autorstwa Thomasa Shellinga. Są to sposoby tzw. milczącej koordynacji (*tacit collusion*) swoich działań w przypadku braku rzeczywistej koordynacji (gracze wybierają swoje strategie niezależnie od siebie, tj. bez możliwości porozumiewania się ani umawiania się na określone zagranie). Taka milcząca koordynacja może opierać się na zwyczaju, tradycji lub na tym, że jedna strategia wydaje się bardziej naturalna/prostsza lub bardziej rzuca się w oczy niż inne. Na przykład idąc chodnikiem, rzadko się zderzamy z innymi przechodniami, ponieważ intuicyjnie czujemy, że lepiej zrobimy, odsuwając się na prawo niż na lewo, przenosząc tym samym reguły ruchu pojazdów na zachowania pieszych, mimo że nie ma w tym drugim zakresie analogicznych regulacji prawnych. Innym przykładem jest sytuacja, kiedy parę osób umówiło się na spotkanie w Warszawie 20 czerwca 2020 r., ale nie sprecyzowało dokładnie miejsca i czasu. Mimo iż teoretycznie każda godzina tego dnia i miejsce w Warszawie mogłyby być równowagą tej gry, to prawdopodobnie strategia polegająca na pojawieniu się „w punkcie informacyjnym na Dworcu Centralnym dokładnie w południe” miałaby większe szanse powodzenia (czyli spotkania pozostałych osób) niż pojawienie się „na ulicy Płacy 47 o godzinie 3.12 nad ranem”. Jeszcze inny przykład cichej koordynacji dotyczy udzielenia pierwszeństwa przejścia wąskim chodnikiem osobom starszych lub kobietom, co wynika z norm kulturowych. W grze dotyczącej wspólnego projektu (Tabela 3.5) punktem ogniskowym jest zapewne, aby każdy pracownik pracował – profil (P, P) – który zapewnia wyższą wypłatę każdemu z nich.

.....  
reguła  
minimaksu  
żału

Jeszcze innym sposobem porównywania różnych równowag, który jest zarazem również wskazówką, jaka równowaga i czy w ogóle równowaga zajdzie w rzeczywistości, jest podejście zwane regułą Savage’a lub regułą minimalizacji maksymalnego żalu (minimax żalu) albo minimalizacji kosztu utraconej możliwości, które już wprowadzono w rozdziale 2 w kontekście decyzji w warunkach niepewności. Tu zastosujemy je dla dwóch graczy, gdy każdy traktuje drugiego jak naturę, która może wybrać dowolny ze stanów (dowolną z decyzji). Takie podejście jest uzasadnione,

jeżeli nic nie wiemy na temat swojego przeciwnika, a w szczególności nie wiemy, czy jest racjonalny. W Tabeli 3.6 przedstawiono wartości żalu dla wypłat Wiersza przy założeniu, że strategia Kolumny jest niepewna. Strategia P Wiersza jest strategią minimaksu żalu. Podobnie strategią minimaksu żalu dla Kolumny jest strategia P (Źródło: opracowanie własne).

Tabela 3.7). Zatem (P, P) to profil, który składa się ze strategii minimaksu żalu dla każdego gracza. Jest to zarazem jedna ze znalezionych wcześniej równowag. Podobnie jak w przypadku dominacji Pareto równowaga (P, P) dominuje drugą równowagę (U, U) również na podstawie reguły minimaksu żalu.

Tabela 3.6

Wartości żalu Wiersza w grze dwóch pracowników pracujących nad wspólnym projektem

	Pracować (P)	Udawać (U)	Max żalu
Pracować (P)	0	1	1
Udawać (U)	2	0	2

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.7

Wartości żalu Kolumny w grze dwóch pracowników pracujących nad wspólnym projektem

	Pracować (P)	Udawać (U)
Pracować (P)	0	2
Udawać (U)	1	0
Max żalu	1	2

Źródło: opracowanie własne.

Należy zaznaczyć, że są sytuacje, w których strategię minimaksu żalu nie pozwalają na wskazanie lepszej z paru równowag oraz sytuacje, w których strategię minimaksu żalu mogą wskazywać strategię niebędące równowagami. Reguła minimaksu żalu ma na celu wskazanie najmniej ryzykownej strategii gracza w sytuacji, kiedy drugi gracz jest zupełnie nieprzewidywalny.

Omówione sposoby wyznaczania lepszej spośród wielu możliwych równowag nie wyczerpują wszystkich możliwości. Pozostaje także ważne pytanie, czy w każdej grze musi istnieć równowaga. W dalszej części pokażemy, że istnieją gry, w których nie istnieją takie równowagi, jakich dotychczas szukaliśmy. Wprowadzimy nową koncepcję – tzw. równowagi w strategiach mieszanych. Intuicyjnie równowaga taka polega na dopuszczeniu losowości w wyborze swojej strategii. A zatem graczowi może się opłacać grać daną strategię jedynie z określonym prawdopodobieństwem.

.....  
Kiedy  
stosowana  
jest strategia  
mieszana?



### 3.3.4. Równowaga w strategiach mieszanych

Rozważymy teraz dwa przypadki, kiedy graczowi może się opłacać wprowadzenie losowości. Z przypadkiem pierwszym mamy do czynienia w grach, w których nie istnieje równowaga typu dotychczas rozważanego (będziemy ją nazywali *równowagą w strategiach czystych*, co ma oznaczać, że strategie w tej równowadze są deterministyczne, tj. dla każdego z graczy jest przewidziana dokładnie jedna jego strategia, którą powinien wybrać). Jest to na przykład znana gra „papier–nożycki–kamień”. Każdy z graczy ma trzy strategie wymienione w nazwie, przy czym papier wygrywa z kamieniem, kamień wygrywa z nożyczkami, a nożycki wygrywa z papierem. Ktokolwiek grał w tę grę wie, że nie istnieje taka para strategii, która jest stabilna. Dla jakiegokolwiek strategii (czy to papier, nożycki, czy kamień) istnieje taka strategia przeciwnika, która tę strategię pokonuje. A zatem opłaca się być nieprzewidywalnym, tj. grać tak, żeby przeciwnik nie mógł mnie zawsze pokonać. Na przykład mogę rzucać kostką i wybrać papier, jeżeli wypadnie jedno lub dwa oczka, wybrać nożycki, jeżeli wypadną trzy lub cztery oczka, i wybrać kamień, jeżeli wypadnie pięć bądź sześć oczek. Jeżeli obaj gracze będą stosować taką strategię niezależnie od siebie, to będzie to właśnie równowaga w strategiach mieszanych. Wówczas żadnemu z graczy nie będzie opłacało się jednostronnie zmienić swojej strategii. Chodzi tutaj o nieostre porównanie, tj. nie ma niczego lepszego, ale może być równie dobrze – w tym przykładzie wszystkie możliwe strategie są równie dobre.

Drugim przypadkiem, w którym zastosowanie mają równowagi w strategiach mieszanych, to sytuacja, w której istnieje wiele równowag w strategiach czystych, na przykład w grze przedstawionej w Tabeli 3.5. Ponieważ nie wiemy, która równowaga zajdzie w rzeczywistości, i nie mamy możliwości skoordynowania się z przeciwnikiem (założmy również, że graczy nie przekonuje dostatecznie argument efektywności Pareto, który nakazuje wybrać równowagę (P, P) – w końcu wybór strategii P jest bardziej ryzykowny niż wybór strategii U), mogę równie dobrze dopuścić losowość i zagrać P z jakimś prawdopodobieństwem (a U w przeciwnym wypadku). Jeżeli mój przeciwnik również zagra w podobny sposób<sup>2</sup>, to będziemy mieli do czynienia z równowagą w strategiach mieszanych, której strategię, jak w każdej równowadze, są najlepszymi odpowiedziami na siebie nawzajem.

Dalej omówimy ten nowy rodzaj równowagi, poczynając od przypadku, kiedy istnieje wiele równowag w strategiach czystych, tj. tak jak w grze przedstawionej

<sup>2</sup> Oczywiście pozostaje wyznaczyć optymalne prawdopodobieństwa wyboru określonych strategii dla obu graczy.

w Tabela 3.5. Następnie zajmiemy się grami, w których nie istnieją w ogóle równowagi w strategiach czystych.

Kontynuujemy rozważania w ramach przykładu dotyczącego Pana Wojtka i Pani Krysi. Dotychczas rozpatrywaliśmy strategie czyste: dany gracz wybiera jedną ze swoich strategii P albo U.

Strategie mieszane to strategie losowe, w których gracz decyduje się, żeby to los zadecydował za niego, a gracz ustala prawdopodobieństwo  $p$  wyboru strategii P (i zarazem prawdopodobieństwo  $1 - p$  wyboru strategii U).

Równowaga w strategiach mieszanych to taka równowaga, w której strategie obu graczy są mieszane<sup>3</sup>.

W analizowanej grze mamy dwie równowagi w strategiach czystych: (P, P) i (U, U). W takiej sytuacji mamy pewność, że istnieje również równowaga w strategiach mieszanych. Jak ją znaleźć? Załóżmy, że Pan Wojtek (Wiersz) z prawdopodobieństwem  $q$  wybiera strategię P i z prawdopodobieństwem  $1 - q$  wybiera strategię U. Z kolei pani Krysia (Kolumna) z prawdopodobieństwem  $p$  wybiera strategię P i z prawdopodobieństwem  $1 - p$  wybiera strategię U. Oczekiwana wypłata Wojtka, kiedy Krysia stosuje swoją (jakąś – jeszcze jej nie znamy) strategię mieszaną, a Wojtek wybiera P, wynosi  $p \times 2 + (1 - p) \times (-1)$ . Z kolei oczekiwana wypłata Wojtka, kiedy Krysia stosuje swoją strategię mieszaną, a Wojtek wybiera U, wynosi  $p \times 0 + (1 - p) \times 0$ . Jeśli któraś z tych oczekiwanych wypłat była większa niż ta druga, to Wojtkowi opłacałoby się wybrać jedną ze swoich strategii:

- jeżeli  $p \times 2 + (1 - p) \times (-1) > p \times 0 + (1 - p) \times 0$ , to Wojtek powinien wybrać P,
- jeżeli  $p \times 2 + (1 - p) \times (-1) < p \times 0 + (1 - p) \times 0$ , to Wojtek powinien wybrać U.

Ponieważ szukamy równowagi w strategiach mieszanych (te w strategiach czystych już wyznaczyliśmy), to znaczy, że żadna ze strategii Wojtka nie może być jednoznacznie lepsza od drugiej, ponieważ wówczas Wojtek zagrałby tę strategię na pewno, czyli otrzymalibyśmy strategię czystą, a nie mieszaną. Stąd wnioskujemy, że obie oczekiwane wypłaty podane powyżej muszą być równe w równowadze. Otrzymujemy zatem równanie, które rozwiązujemy, aby uzyskać wartość  $p$  w równowadze:

$$p \times 2 + (1 - p) \times (-1) = p \times 0 + (1 - p) \times 0 \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

Interpretacja jest następująca: Krysia stosuje strategię mieszaną  $\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}U$  (z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$  gra strategię P, a z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$  gra strategię U),

przy której Wojtkowi jest wszystko jedno, czy wybierze strategię P, czy U (oczekiwa-

<sup>3</sup> W definicji równowagi w podrozdziale 3.2.1.

na wypłatę obu w obu strategiach jest taka sama). Podobnie możemy przeanalizować problem z drugiej strony. Załóżmy, że Wojtek stosuje strategię mieszaną  $qP + (1 - q)U$ . Wówczas oczekiwana wypłata Krysi wynosi  $q \times 2 + (1 - q) \times (-1)$ , jeżeli zagra strategię P, lub  $q \times 0 + (1 - q) \times 0$ , jeżeli zagra strategię U. Jeżeli jedna z tych wypłat byłaby wyższa niż druga, wówczas Krysi opłacałoby się wybrać jedną ze strategii czystych. Ponieważ szukamy równowagi w strategiach mieszanych, Krysi musi być wszystko jedno, którą ze swoich strategii wybrać, a zatem te dwie powyższe oczekiwane wypłaty muszą być sobie równe:

$$q \times 2 + (1 - q) \times (-1) = q \times 0 + (1 - q) \times 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3}.$$

Wojtek stosuje zatem strategię mieszaną  $\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}U$ , przy której Krysi jest wszystko jedno, czy wybierze strategię P, czy U.

Znaleźliśmy zatem równowagę w strategiach mieszanych, która wynosi

$\left(\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}U, \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}U\right)$  (oba gracze stosują strategię mieszaną  $\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}U$ ). Zwery-

fikujemy, czy ten profil jest rzeczywiście profilem najlepszych odpowiedzi graczy na strategię przeciwnika. Tabela 3.8 zawiera jeszcze raz wypłaty graczy w analizowanej grze, przy czym tym razem dodaliśmy dodatkowy wiersz i kolumnę, oznaczające strategie mieszane, kolejno Wojtki i Krysi.

**Tabela 3.8**

**Tabela wypłat gry dwóch pracowników pracujących nad wspólnym projektem z uwzględnieniem strategii mieszanych**

	P	U	$\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}U$
P	(2, 2)	(-1, 0)	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$
U	(0, -1)	(0, 0)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$
$\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}U$	$\left(\frac{2}{3}, 0\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$	(0, 0)

Źródło: opracowanie własne.

Nowe profile wypłat są oczekiwanymi wypłatami graczy wynikającymi z odpowiedniej kombinacji strategii czystych i mieszanych, na przykład profil wypłat  $\left(0, \frac{2}{3}\right)$  w trzeciej kolumnie pierwszego wiersza oznacza, że jeżeli Wojtek stosuje strategię

P, a Kryśia stosuje strategię mieszaną  $\frac{1}{3} P + \frac{2}{3} U$ , to oczekiwana wypłata Wojtka wynosi 0, a oczekiwana wypłata Krysi wynosi  $\frac{2}{3}$ . Zauważmy, że na podstawie nowej tabeli możemy zweryfikować, że oprócz dwóch równowag w strategiach czystych znalezionych poprzednio (P, P) oraz (U, U), profil strategii mieszanych  $\left(\frac{1}{3} P + \frac{2}{3} U, \frac{1}{3} P + \frac{2}{3} U\right)$  również jest równowagą<sup>4</sup>.

Możemy sformułować teraz ważną zasadę dotyczącą gier statycznych, gdzie gracze wybierają jednocześnie i niezależnie od siebie swoją strategię. Jeżeli istnieje dokładnie jedna równowaga w strategiach czystych, tak jak ma to miejsce w grach zaprezentowanych w tabelach Tabela 3.3 i Tabela 3.4, wówczas nie istnieje już równowaga w strategiach mieszanych. Jeżeli istnieją dwie (lub więcej) równowagi w strategiach czystych, to na pewno istnieje także równowaga w strategiach mieszanych. Taka sytuacja ma miejsce w grze z Tabela 3.5.

Istnieją jeszcze gry, w których w ogóle nie ma równowagi w strategiach czystych. Wówczas możemy być jednak pewni, że będzie istniała równowaga w strategiach mieszanych. Taka sytuacja ma miejsce, gdy najlepszą strategią jest bycie nieprzewidywalnym, tj. kiedy chodzi o to, aby przeciwnik się nie domyślił, której konkretnej strategii użyjemy. Zanim przedstawimy przykład takiej gry, sformułujmy teraz ważne stwierdzenie, którego autorem jest John Nash.

Istnienie równowagi: Każda gra statyczna, w której gracze wybierają jednocześnie i niezależnie od siebie jedną z  $n$  dostępnych dla siebie strategii, ma przynajmniej jedną równowagę: jeśli nie w strategiach czystych, to w strategiach mieszanych. Równowag może być więcej niż jedna.

Przejdźmy teraz do przykładu gry, w której nie istnieje równowaga w strategiach czystych. Wyobraźmy sobie pracownika, który przychodzi o pracy i ma do wyboru przejście lewym bądź prawym korytarzem. Pracownik bardzo nie chce spotkać swojego szefa, który chce mu zlecić dodatkową pracę do wykonania. Z kolei szef ma do wyboru zacząć się w prawym lub lewym korytarzu tak, aby złapać pracownika. Zależy mu na tym, aby spotkać pracownika i zadać mu dodatkową pracę. Załóżmy, że ja jako pracownik zdecydowałem się pójść prawym korytarzem. Moja wypłata zależy

.....  
czwarta gra  
- pracownik  
kontra szef

<sup>4</sup> W tabeli 3.6 jest reprezentowane poprzez podkreślenie obu wypłat na przecięciu ostatniej kolumny i wiersza.

od decyzji mojego szefa: jeśli on zdecyduje się zacząć w lewym korytarzu, wówczas uniknę dodatkowej pracy, jeśli zaś będzie czekał w prawym korytarzu, będę zmuszony wykonać dodatkową pracę. Niech pracownik otrzymuje wypłatę +1, jeśli nie spotka szefa i -1, jeśli spotka szefa. Wypłaty szefa są dokładnie odwrotne w stosunku do wypłat pracownika, tj. otrzymuje wypłatę -1, kiedy nie spotka pracownika i +1, jeżeli go spotka. W Tabeli 3.9 przedstawiono opisaną grę.

Tabela 3.9

Tabela wypłat gry szef-pracownik (pracownik wybiera jedną z dwóch strategii – dwa wiersze, i jednocześnie szef wybiera jedną z dwóch strategii – dwie kolumny)

	Lewy (L)	Prawy (P)
Lewy (L)	(-1, <u>1</u> )	( <u>1</u> , -1)
Prawy (P)	( <u>1</u> , -1)	(-1, <u>1</u> )

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że w tej grze najlepszą odpowiedzią szefa na strategię pracownika jest wybrać ten sam korytarz co pracownik. Jednocześnie najlepszą odpowiedzią pracownika jest wybrać inną strategię niż szef. Ilustrują to podkreślenia odpowiednich wypłat w Tabeli 3.9. Ponieważ nie istnieje profil strategii, który składa się ze strategii będących najlepszymi odpowiedziami na siebie nawzajem, nie istnieje również równowaga w strategiach czystych. W takim razie trudno wskazać konkretny profil, który powinien być grany. Rozwiązaniem jest dopuszczenie zachowania losowego, czyli trzeba szukać równowagi w strategiach mieszanych. Intuicyjnie, w tej grze opłaca się być jak najbardziej nieprzewidywalnym dla przeciwnika. Na przykład pracownik będzie najbardziej nieprzewidywalny dla szefa, kiedy będzie wybierał swoją strategię losowo: może rzucać monetą i gdy wypadnie reszka, powinien pójść lewym korytarzem, a jeśli wypadnie orzeł, powinien wybrać prawy korytarz. To samo tyczy się szefa. On również powinien być nieprzewidywalny dla pracownika: może również rzucać monetą i wybrać lewy korytarz, jeśli wypadnie reszka, a prawy korytarz, jeżeli wypadnie orzeł. Co stałoby się, gdyby przypuścimy pracownik stosował strategię „mniej losową”: wybierałby lewy korytarz średnio 6 na 10 razy ( $q = 0,6$ ). Wówczas oczekiwana wypłata szefa wynosiłaby:

- $0,6 \times 1 + 0,4 \times (-1) = 0,2$ , jeżeli wybierze strategię L,
- $0,6 \times (-1) + 0,4 \times 1 = -0,2$ , jeżeli wybierze strategię P.

Szef zatem powinien wówczas wybrać strategię L: jego oczekiwana wypłata wynosiłaby 0,2, podczas gdy oczekiwana wypłata pracownika w tym układzie wynosiłaby -0,2. A zatem szef miałby przewagę nad pracownikiem. Średnio w 60% przypadków spotkaliby się w lewym korytarzu, a tylko w 40% przypadków szef czyhałby

na pracownika w lewym korytarzu, podczas gdy pracownik poszedłby prawym korytarzem. Optymalną strategią zarówno szefa, jak i pracownika jest w tym przypadku strategia  $\frac{1}{2} L + \frac{1}{2} P$ . A zatem jedyną równowagą jest równowaga w strategiach mies-

szanych  $\left(\frac{1}{2} L + \frac{1}{2} P, \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} P\right)$ . Wówczas średnio 1 na 4 razy zachodzić będzie każdy

z czterech profilów strategii: (L, L), (P, P), (L, P), (P, L). W pierwszych dwóch z tych czterech profilów zadowolony będzie szef, a w następnych dwóch profilach zadowolony będzie pracownik. Żaden z graczy nie może zapewnić sobie przewagi nad drugim – oczekiwana wypłata szefa i pracownika w równowadze wynosi 0.

### 3.4. Statyczne gry dwuosobowe – gry ściśle konkurencyjne

Gra szefa i pracownika przedstawiona w Tabeli 3.9 jest szczególnym przykładem gier, w których występuje skrajny konflikt interesów. To, co jest dobre dla jednego gracza, jest zarazem złe dla drugiego gracza. Gry takie nazywane są *grami ściśle konkurencyjnymi*, ponieważ wygrać można tylko kosztem drugiego – jest to zaprzeczenie często spotykanego w biznesie określenia sytuacji typu *win-win*.

Gry ściśle konkurencyjne to takie, w których jeżeli jeden gracz woli jeden profil strategii od drugiego, to drugi gracz woli ten drugi od pierwszego<sup>5</sup>.

W dalszej części rozdziału będziemy analizować takie gry, ponieważ będziemy mogli uzyskać ciekawe rezultaty przy zastosowaniu prostych metod dzięki temu, że gry te mają dogodną matematyczną strukturę i właściwości. Najpierw opiszemy własności gier ściśle konkurencyjnych i wyjaśnimy, że ich zastosowanie jest szersze, niż by się mogło wydawać na podstawie nazwy – powiemy o tym, jak wyznaczać poziomy bezpieczeństwa, tj. wypłaty graczy, które mogą sobie zagwarantować w grze, stosując bezpieczną strategię. Następnie powiemy o tym, jak w grach ściśle konkurencyjnych można alternatywnie wyznaczać równowagę.

.....  
gra ściśle  
konkuren-  
cyjna

#### 3.4.1. Własności i zastosowanie gier ściśle konkurencyjnych

Aby analizować gry ściśle konkurencyjne, wystarczy uproszczony zapis tabeli wypłat gry, w którym są podane jedynie wypłaty Wiersza. Wiersz stara się zmaksymalizować swoje wypłaty, wybierając odpowiedni wiersz, a Kolumna jednocześnie

<sup>5</sup> Zauważmy, że korzystając z definicji dominacji Pareto, alternatywnie możemy powiedzieć, że gry ściśle konkurencyjne to takie, w których każdy profil strategii graczy jest efektywny w sensie Pareto (tj. nie jest zdominowany w sensie Pareto przez żaden inny profil strategii).

stara się wypłaty Wiersza zminimalizować, wybierając odpowiednią kolumnę. W Tabeli 3.10 przedstawiono grę szefa i pracownika z uproszczonym zapisem.

**Tabela 3.10**

Tabela wypłat gry szef-pracownik (pracownik wybiera jedną z dwóch strategii – dwa wiersze, i jednocześnie szef wybiera jedną z dwóch strategii – dwie kolumny; liczby w tabeli oznaczają wypłaty Wiersza)

	Lewy (L)	Prawy (P)
Lewy (L)	-1	1
Prawy (P)	1	-1

Źródło: opracowanie własne.

Gry ściśle konkurencyjne są szczególnym przypadkiem gier dwuosobowych w postaci ogólnej, które analizowaliśmy do tej pory, a zatem wszystko, co dotychczas zostało powiedziane, stosuje się również do gier ściśle konkurencyjnych. Jednakże gry takie można analizować w sposób odmienny – łatwiejszy – niż gry bez ścisłego konfliktu interesów, ponieważ mają dogodną strukturę matematyczną. Podobnie jak w przypadku dwuosobowych gier ogółem, w grach ściśle konkurencyjnych również występuje dwóch graczy: Wiersz i Kolumna. Grę przedstawiać będziemy także w postaci tabeli. Jeden gracz – Wiersz – wybiera jedną ze swoich strategii, czyli jeden z wierszy w tabeli gry i jednocześnie drugi gracz – Kolumna – wybiera jedną ze swoich strategii, czyli jedną z kolumn w tabeli gry.

Dla gier ściśle konkurencyjnych specyficzna jest struktura wypłat. Jeśli Wiersz wybrał wiersz numer  $i$ , a Kolumna wybrała kolumnę numer  $j$ , to wypłata Wiersza wynosi  $u_{ij}$ , natomiast wypłata Kolumny wynosi  $C - Bu_{ij}$ , gdzie  $C$  i  $B$  to dodatnie liczby. Zauważmy, że wypłaty graczy zależą od profilu strategii graczy, tj. wyboru Wiersza oraz wyboru Kolumny.

Na przykład w grze przedstawionej w Tabeli 3.10, jeśli Wiersz (pracownik) wybierze strategię lewy, a Kolumna (szef) wybierze strategię prawy, to wypłata Wiersza wynosi +1 a wypłata Kolumny wynosi  $0 - 1 = -1$ . W tym przypadku wartość  $C$  wynosi 0, a wartość  $B$  wynosi 1. Gry takie nazywane są grami o sumie zerowej<sup>6</sup>.

Gry o sumie zerowej (*zero-sum games*) to gry ściśle konkurencyjne, w których w każdej komórce wypłata jednego gracza jest równa minus wypłacie drugiego gracza i dlatego sumują się do zera. Stąd w postaci uproszczonej zapisywane są tylko wypłaty Wiersza.

<sup>6</sup> Z kolei jeżeli  $B = 1$ , a  $C$  jest niezerowe, to mamy do czynienia z tzw. grami o stałej sumie wypłat (*constant-sum games*). W każdej komórce wypłaty obu graczy sumują się do wartości  $C$ .



### Celsjusz i Fahrenheit, czyli jak mierzyć wypłaty/użyteczność graczy?

Załóżmy, że w niedzielę temperatura wynosiła 20°C, w poniedziałek 10°C, a we wtorek 5°C. Czy powiemy, że w niedzielę było dwa razy „więcej temperatury” niż w poniedziałek i cztery razy więcej niż we wtorek? Albo czy powiemy, że spadek temperatury z niedzieli na poniedziałek był dwukrotnie większy niż z poniedziałku na wtorek? A czy odpowiedź na te pytania byłaby inna, gdyby mierzyć temperaturę amerykańskim termometrem zamiast polskiego? W niedzielę taki termometr wskazywał 68°F, w poniedziałek 50°F, a we wtorek 41°F. Czy w niedzielę jest nadal dwa razy „więcej temperatury” niż w poniedziałek? A czy spadek temperatury z niedzieli na poniedziałek był dwukrotnie większy niż z poniedziałku na wtorek? Z temperaturą mierzoną według skali Celsjusza i Fahrenheita jest tak samo, jak z użytecznością/wypłatą gracza w grze. Jest to tzw. skala interwałowa, tj. w takiej skali sensownie można porównywać tylko dwie różnice/przedziały wartości. Spadek temperatury z niedzieli na poniedziałek jest dwukrotnie większy niż spadek z poniedziałku na wtorek niezależnie, czy temperatura mierzona jest w stopniach Celsjusza, czy w stopniach Fahrenheita. Transformacja pomiędzy dwiema skalami mierzącymi to samo jest wówczas ściśle rosnącą transformacją afiniczną, tj. taką w której w celu otrzymania wartości według jednej skali należy przemnożyć wartość według drugiej skali przez jedną stałą i następnie dodać drugą stałą, przy czym ta pierwsza musi być dodatnia. Na przykład wzór  $F = 32 + 1,8 \times C$  zamienia stopnie Celsjusza na stopnie Fahrenheita. W skali przedziałowej można dowolnie wybrać zero oraz jednostkę pomiaru. W przypadku skali Celsjusza 0°C oznacza temperaturę topnienia lodu przy ciśnieniu normalnym jednej atmosfery fizycznej, a jednostka wynosi jedną setną różnicy temperatur wrzenia wody i topnienia lodu przy tych samych warunkach.

Efektem mierzenia wypłat graczy za pomocą skali interwałowej (w przypadku teorii gier mówimy o użyteczności kardynalnej) jest to, że każda gra ściśle konkurencyjna może być przedstawiona w sposób równoważny za pomocą gry o sumie zerowej. Jeżeli bowiem dwaj gracze mają dokładnie przeciwstawne interesy, to tak jakby jednemu zależało, aby było jak najcieplej, a drugiemu zależało, aby było jak najzimniej. Ponieważ jednak możemy sobie wybrać jednostkę i zero skali użyteczności graczy, to możemy je tak dobrać, żeby sumowały się zawsze do zera, np. użyteczność jednego to *temperatura* według skali Celsjusza, a użyteczność drugiego to *minus temperatura* według skali Celsjusza.

Istotną własnością gier analizowanych w tym rozdziale jest, że Wiersz i Kolumna mają dokładnie przeciwne do siebie interesy – wzrost wypłaty Wiersza powoduje spadek wypłaty Kolumny. Takie sytuacje mają szczególne zastosowanie w analizie konfliktu, czy to biznesowego, czy to militarnego lub sportowego. W biznesie oprócz sytuacji czystego konfliktu, mamy jednak do czynienia często z sytuacją częściowo lub całkowicie zbieżnych interesów. Firmy kooperują ze sobą – czasem nawet tworząc zmywy cenowe lub kartele, sklepom zależy na reputacji klientów, tworzą programy lojalnościowe itd. Takie sytuacje będą analizowane za pomocą metod zarysowanych w pierwszej części rozdziału. Wciąż jednak metody gier ściśle konkurencyjnych przedstawionych w dalszej części tego rozdziału są przydatne: pozwalają na analizę najgorszego możliwego przypadku (czyli sytuacji, gdy drugi gracz nie

.....  
Ścisła  
konkurencja  
– najgorszy  
przypadek

dostrzeże tej wspólnoty interesów i będzie się zachowywał nierozsądnie ze swojego punktu widzenia i jednocześnie niekorzystnie dla nas) i wyliczenie najwyższej możliwej wypłaty, którą możemy sobie zagwarantować w danej sytuacji niezależnie od strategii przeciwnika.

Przykładowo rozważmy grę przedstawioną w Tabeli 3.5 i następnie analizowaną w Tabeli 3.8. Gra ta nie jest ściśle konkurencyjna, ponieważ interesy graczy nie są ściśle przeciwstawne, na przykład obaj będą najbardziej zadowoleni z profilu strategii (P, P), tj. wtedy gdy obaj będą pracować nad projektem zamiast udawać. Z dokonanej analizy wynika, że gra ta ma trzy możliwe równowagi, dwie w strategiach czystych,

tj. (P, P), (U, U), oraz jedną w strategiach mieszanych  $\left(\frac{1}{3} P + \frac{2}{3} U, \frac{1}{3} P + \frac{2}{3} U\right)$ . Wypła-

ty w tych równowagach to, kolejno: (2, 2), (0, 0) oraz (0, 0), gdzie ostatnia para oznacza oczekiwane wypłaty obu graczy w równowadze w strategiach mieszanych. Mamy zatem do czynienia z jedną korzystną równowagą (P, P), gdzie obaj gracze pracują

oraz z dwiema zdominowanymi w sensie Pareto równowagami (U, U) i  $\left(\frac{1}{3} P + \frac{2}{3} U, \frac{1}{3} P + \frac{2}{3} U\right)$ . Bez dodatkowych informacji nie możemy stwierdzić, która z tych trzech

równowag zajdzie w rzeczywistości, chociaż wiadomo, że gracze chcieliby, aby była to równowaga (P, P). Każdy z graczy może oczywiście zaryzykować, zagrać strategię P i liczyć na to, że przeciwnik również to uczyni.

Gracza w takiej grze może jednak interesować, jaką wypłatę może sobie zagwarantować w najgorszym możliwym przypadku. Najgorszy możliwy przypadek dla gracza występuje wtedy, gdy jego przeciwnik zamiast maksymalizować swoje własne wypłaty, stara się zminimalizować naszą wypłatę. Czyli dla każdej strategii musimy określić najgorszą możliwą sytuację, żeby zobaczyć, dla której strategii ten najgorszy scenariusz jest jak najmniej zły (analogicznie jak w przypadku reguły maximin z rozdziału 2). Żeby ten najgorszy scenariusz określić, szukamy kolumny o najmniejszej wypłacie, czyli jak największej ujemnej wypłacie, a to jakbyśmy szukali najlepszej odpowiedzi gracza o dokładnie przeciwstawnych interesach.

Poziom bezpieczeństwa gracza w danej grze to najwyższa możliwa wypłata, którą ten gracz może sobie zagwarantować niezależnie od strategii przeciwnika.

Zauważmy, że w grze przedstawionej w Tabeli 3.5, Wiersz może sobie zagwarantować wypłatę równą 0, jeżeli zastosuje strategię U. W przypadku, gdy zastosuje strategię P, Wiersz musi się liczyć z możliwością, że jego wypłata wyniesie -1, jeżeli Kolumna wybierze U. Powstaje pytanie: jaka jest najwyższa możliwa wypłata, którą

.....  
Poziom  
bezpieczeń-  
stwa

Wiersz może sobie zagwarantować? Aby odpowiedzieć, rozważmy hipotetyczną sytuację, kiedy interesy Wiersza i Kolumny są dokładnie przeciwstawne. Załóżmy zatem, że wypłaty Wiersza są takie, jak w rzeczywistej grze z Tabela 3.5, natomiast wypłaty Kolumny są równe ujemnym wypłatom Wiersza (czyli stratom Wiersza). W Tabeli 3.11 przedstawiono taką sytuację.

**Tabela 3.11**

Hipotetyczna gra powstała na podstawie gry z Tabela 3.5, w której wypłaty Kolumny, zamiast rzeczywistych wartości, są równe ujemnym wypłatom Wiersza – gra służy do wyliczenia poziomu bezpieczeństwa Wiersza w rzeczywistej grze (podkreślona wypłata danego gracza w profilu wypłat na przecięciu strategii dwóch graczy oznacza, że odpowiednia strategia tego gracza jest jego najlepszą odpowiedzią na odpowiednią strategię przeciwnika)

	P	U
P	( <u>2</u> , -2)	(-1, 1)
U	(0, <u>0</u> )	(0, 0)

Źródło: opracowanie własne.

Jest to oczywiście gra o sumie zerowej, ponieważ wypłaty Wiersza i Kolumny sumują się w każdej komórce do 0. Jak wspomniano, tabelę wypłat takiej gry zapisywać możemy w skróconym zapisie, w którym podaje się tylko wypłaty Wiersza. Techniki analizy takich gier również będą uproszczone, choć oczywiście gry takie można także analizować ogólnymi metodami połączonymi do tej pory w tym rozdziale. Stosując dotychczas poznane metody podkreślania wypłat odpowiadających najlepszym odpowiedziom graczy na daną strategię przeciwnika, dochodzimy do wniosku, że jedyną równowagą w tej grze jest para strategii (U, U). Pozostałe dwie równowagi w grze rzeczywistej analizowanej w tabelach Tabela 3.5 i Tabela 3.8 nie są już równowagami w nowej grze. Wypłata Wiersza w równowadze wynosi 0, a zatem ta wartość to poziom bezpieczeństwa Wiersza w grze rzeczywistej. Potwierdziliśmy formalnie wniosek, który został intuicyjnie sformułowany powyżej.

Analogicznie możemy wyznaczyć poziom bezpieczeństwa Kolumny, analizując hipotetyczną sytuację, w której wypłaty Kolumny, takie jak w rzeczywistej grze, a wypłaty Wiersza są równe ujemnym wypłatom Kolumny. Otrzymalibyśmy wówczas grę o sumie zerowej i wyliczylibyśmy jej równowagę. Wypłata Kolumny w równowadze takiej gry to poziom bezpieczeństwa Kolumny w grze rzeczywistej. Zauważmy, że w przypadku analizowanej gry z Tabela 3.5 nie ma potrzeby oddzielnie liczyć poziomu bezpieczeństwa Kolumny, ponieważ gra jest symetryczna: gdybyśmy zamienili miejscami Kolumnę z Wierszem i Wiersz z Kolumną odpowiednio przepisując ich wypłaty, otrzymalibyśmy dokładnie tę samą grę. A zatem poziom bezpieczeństwa Kolumny musi być taki sam jak poziom bezpieczeństwa Wiersza i wynosi tutaj 0.

W rzeczywistej grze są trzy równowagi, z których jedna (P, P) jest lepsza niż pozostałe, ponieważ prowadzi do profilu wypłat (2, 2). Strategia bezpieczeństwa dla obu graczy polega na zagranie strategii U, w wyniku czego gracze gwarantują sobie wypłatę 0. Różnica pomiędzy pożądaną wypłatą 2 dla obu graczy i poziomem bezpieczeństwa 0, to cena ubezpieczenia w sytuacji, kiedy ja zagram strategię P, a mój przeciwnik zagra strategię U. Czy gracz skorzysta z ubezpieczenia, grając swoją bezpieczną strategię U, czy też zaryzykuje, grając P, zależy od tego, jakie przyporządkowuje prawdopodobieństwo, że przeciwnik zagra U.

.....  
Zapis  
uproszczony  
gry o sumie  
zerowej

Gry o sumie zerowej potrzebne do wyznaczania poziomów bezpieczeństwa graczy będziemy w dalszej części zapisywać w postaci uproszczonej, w której podaje się tylko wypłaty Wiersza, ponieważ wypłaty Kolumny są po prostu ujemnymi wypłatami Wiersza. Przy wyznaczaniu poziomu bezpieczeństwa dla Wiersza nie ma to specjalnego znaczenia, ponieważ analizujemy w tym celu hipotetyczną grę, w której w uproszczonym zapisie pozostawiamy wypłaty Wiersza, pomijając wypłaty Kolumny. Jednak przy wyznaczaniu poziomu bezpieczeństwa Kolumny powinniśmy pozostawić rzeczywiste wypłaty Kolumny, pomijając wypłaty Wiersza, następnie przemnożyć je przez  $(-1)$ , uzyskując hipotetyczne wypłaty Wiersza i w ten sposób uzyskujemy zapis gry o sumie zerowej w uproszczonym zapisie służący do wyznaczania poziomu bezpieczeństwa Kolumny. Następnie po znalezieniu wartości tej gry (wypłata Wiersza w równowadze tej gry), trzeba pamiętać, że, aby uzyskać poziom bezpieczeństwa Kolumny, należy uzyskaną wartość ponownie przemnożyć przez  $(-1)$ , uzyskując wypłatę Kolumny w równowadze tej gry. Wartość ta jest poziomem bezpieczeństwa Kolumny.

Podsumowując, analiza gier ściśle konkurencyjnych, w tym gier o sumie zerowej, którą proponujemy w dalszej części rozdziału, jest przydatna nie tylko w sytuacjach ściśle konkurencyjnych. W grach, w których występuje pewna zbieżność interesów, gry o sumie zerowej pozwalają na wyznaczenie poziomów bezpieczeństwa graczy, a więc najwyższej gwarantowanej wypłaty, którą gracz może sobie zapewnić. W dalszej części rozdziału będziemy analizować gry ściśle konkurencyjne i gry o sumie zerowej. Takie gry można oczywiście analizować metodami poznanymi do tej pory w niniejszym rozdziale, jednak dogodna struktura matematyczna umożliwia prostszą analizę. Przedstawiamy ją poniżej.

### 3.4.2. Równowaga w strategiach czystych jako punkt siodłowy

.....  
Przykład  
- stacje  
telewizyjne

Zacznijmy od przykładu. Dwie stacje telewizyjne TV Le Cure (Wiersz) i TV Gioia (Kolumna) konkurują o widzów w czasie największej oglądalności, tj. w paśmie 20.00–22.00 godz. Cała grupa docelowa to 10 mln widzów, którzy w zależności od

tęgo co stacje telewizyjne zdecydują się nadawać, będą oglądali albo jedną, albo drugą stację (zakładamy, że nie ma innej możliwości, tj. nie ma trzeciej stacji, którą mogą oglądać, ani nie ma innych możliwości, jak czytanie książki, wyjście do restauracji bądź pójście spać). Jeśli jedną stację zdecyduje się oglądać 2 mln ludzi, wówczas 8 mln (10 mln – 2 mln) będzie oglądać drugą stację. Każda ze stacji ma do wyboru nadać komedię, telenowelę lub dramat. W Tabeli 3.12 przedstawiono wypłaty stacji TV Le Cure (Wiersza) w zależności od profilu strategii stacji TV Le Cure i TV Gioia.

Tabela 3.12

Tabela wypłat gry dwóch stacji telewizyjnych pragnących zmaksymalizować oglądalność w przedziale dużej oglądalności 20.00–22.00 (stacja TV Le Cure wybiera jedną z trzech strategii wierszowych, a stacja TV Gioia wybiera jedną z trzech strategii kolumnowych; w tabeli podano oglądalność TV Le Cure w zależności od profilu strategii graczy)

	Komedia (K)	Telenowela (T)	Dramat (D)
Komedia (K)	3 mln	1 mln	6 mln
Telenowela (T)	4 mln	6 mln	5 mln
Dramat (D)	2 mln	4 mln	7 mln

Źródło: opracowanie własne.

Zastanówmy się, które strategie są optymalne dla obu stacji. Zaczniemy od tego, co powinien zrobić Wiersz w zależności od poszczególnych decyzji Kolumny:

- jeśli Kolumna wybierze K, to Wiersz powinien wybrać T (wypłata 4 jest największa w kolumnie K),
- jeśli Kolumna wybierze T, to Wiersz również powinien wybrać T (wypłata 6 jest największa w kolumnie T),
- jeśli Kolumna wybierze D, to Wiersz również powinien wybrać D (wypłata 7 jest największa w kolumnie D).

Zauważmy, że w powyższym procesie dochodzenia do optymalnych strategii Wiersza w zależności od decyzji Kolumny szukamy największej wypłaty w danej kolumnie.

Odwróćmy teraz rozumowanie: co powinna zrobić Kolumna w zależności od poszczególnych decyzji Wiersza. Musimy pamiętać, że wypłaty w tabelce są wypłatami Wiersza, a ponieważ wypłata Kolumny to 10 mln pomniejszone o wypłatę Wiersza, to Kolumna będzie starała się zminimalizować wypłatę Wiersza. Zatem:

- jeśli Wiersz wybierze K, to Kolumna powinna wybrać T (wypłata 1 jest najmniejsza w Wierszu K),
- jeśli Wiersz wybierze T, to Kolumna powinna wybrać K (wypłata 4 jest najmniejsza w Wierszu T),
- jeśli Wiersz wybierze D, to Kolumna powinna wybrać K (wypłata 2 jest najmniejsza w Wierszu D).

Zauważmy, że w powyższym procesie dochodzenia do optymalnych strategii Kolumny w zależności od decyzji Wiersza szukamy najmniejszej wypłaty w danym wierszu.

Powstaje pytanie, czy można jakoś połączyć te dwie perspektywy rozumowania w jedną. Okazuje się, że takie połączenie prowadzi do pojęcia równowagi, którą już znamy dla gier ogółem, tj. niekoniecznie ściśle konkurencyjnych (patrz definicja równowagi w podrozdziale 0).

Zauważmy, że w omawianym przykładzie jest tylko jedna para strategii, która jest równowagą. Jest to para (T, K), ponieważ jeśli Kolumna wybiera K, to Wiersz powinien wybrać T i jeśli Wiersz wybiera T, to Kolumna powinna wybrać K. Nie ma zarazem innej takiej pary, dla której zachodziłaby ta własność. Wypłata w równowadze wynosi 4 mln dla Wiersza i 6 mln dla Kolumny. Parę (T, K) nazywamy równowagą lub punktem siodłowym, ponieważ wypłata Wiersza dla tej pary (4 mln) jest jednocześnie maksymalną wypłatą w swojej kolumnie (kolumna K) oraz minimalną wypłatą w swoim wierszu (wiersz T). Podsumujmy:

Punkt siodłowy to para strategii (X, Y), gdzie X jest strategią Wiersza, a Y jest strategią Kolumny, taka że X daje największą wypłatę w kolumnie Y i Y daje najmniejszą wypłatę w wierszu X. Możemy to wyrazić za pomocą warunku punktu siodłowego:

$$\max_{\text{wiersze}} \min_{\text{kolumny}} \text{wiersza} = \min_{\text{kolumny}} \max_{\text{wiersze}} \text{maksimum kolumny} = v.$$

Zauważmy, że Wiersz wybierając strategię T, gwarantuje sobie wypłatę przynajmniej 4 (jest to najniższa wypłata w wierszu T) i jednocześnie Kolumna wybierając strategię K, gwarantuje sobie, że wypłata Wiersza nie będzie większa niż 4 (jest to największa wypłata w kolumnie K).

Wartość gry to liczba<sup>7</sup>  $v$  taka, że Wiersz ma strategię, która gwarantuje mu przynajmniej wypłatę równą  $v$  i jednocześnie Kolumna ma strategię, która gwarantuje jej, że wypłata Wiersza nie będzie większa niż wartość  $v$ .

Z przytoczonych definicji wynika następujący wniosek.

Punkt siodłowy a równowaga: Punkt siodłowy gry jest równowagą tej gry.

Wniosek jest ważny, ponieważ sugeruje sposób znajdowania równowagi w grach ściśle konkurencyjnych: szukamy maksymalnych wypłat w kolumnach i wybieramy najmniejszą spośród nich (minimax); następnie szukamy minimalnych wypłat w wierszach i wybieramy największą spośród nich (maximin). Jeśli te dwie znalezione wartości są sobie równe, to znaleźliśmy punkt siodłowy, czyli równowagę. Wartość gry to wartość  $v$ , która jest równa wartości minimax i wartości maximin.

<sup>7</sup> O ile istnieje.

W Tabeli 3.13 zaprezentowano ten sposób dochodzenia do równowagi w przykładzie stacji telewizyjnych konkurujących o zdobycie jak największej liczby widzów.

Tabela 3.13

Sposób znajdowania punktu siodłowego w grze dwóch stacji telewizyjnych TV Le Cure oraz TV Gioia (punkt siodłowy to (T, K), a wartość gry wynosi 4 mln)

	Komedia (K)	Telenowela (T)	Dramat (D)	MIN
Komedia (K)	3 mln	1 mln	6 mln	1 mln
Telenowela (T)	4 mln	6 mln	5 mln	<b>4 mln</b>
Dramat (D)	2 mln	4 mln	7 mln	2 mln
MAX	<b>4 mln</b>	6 mln	7 mln	

Źródło: opracowanie własne.

Gra ma punkt siodłowy (T, K) z wypłatą Wiersza równą 4 mln, która jest wartością tej gry. Strategia (T, K) jest równowagą, ponieważ jeśli jesteśmy w równowadze żadnemu z graczy nie opłaca się samodzielnie zmienić strategii. Na przykład Wierszowi nie opłaca się zmienić strategii na inną niż T, jeśli Kolumna gra strategię K. I jednocześnie Kolumnie nie opłaca się zmienić strategii na inną niż K, jeśli Wiersz gra strategię T.

Natychmiast rodzą się dwa pytania:

- czy każda gra ma punkt siodłowy?
- czy punktów siodłowych może być więcej niż jeden?

Na pytania odpowiemy zmieniając nieco nasz przykład. Rozważmy dwie zmodyfikowane tabele wypłat dla gry dwóch stacji telewizyjnych. W obu przypadkach wszystko pozostaje niezmienione względem Tabeli 3.12, z wyjątkiem jednej wypłaty (zaznaczonej w odpowiednich tabelach kolorem zielonym):

- w Tabeli 3.14: wypłata dla profilu (T, T) zmienia się z 6 na 4;
- w Tabeli 3.15: wypłata dla profilu (T, D) zmienia się z 5 na 3.

Tabela 3.14

Zmodyfikowana tabela wypłat dla gry dwóch stacji telewizyjnych TV Le Cure oraz TV Gioia (są tutaj dwa punkty siodłowe, czyli (T, K) oraz (T, T); wartość gry wynosi 4 mln)

	Komedia (K)	Telenowela (T)	Dramat (D)	MIN
Komedia (K)	3 mln	1 mln	6 mln	1 mln
Telenowela (T)	4 mln	4 mln	5 mln	<b>4 mln</b>
Dramat (D)	2 mln	4 mln	7 mln	2 mln
MAX	<b>4 mln</b>	<b>4 mln</b>	7 mln	

Źródło: opracowanie własne.



**Tabela 3.15**  
**Zmodyfikowana tabela wypłat dla gry dwóch stacji telewizyjnych TV Le Cure oraz TV Gioia**  
**(nie ma tutaj żadnego punktu siodłowego, ponieważ maximin wynosi 3 mln, a minimax**  
**wynosi 4 mln)**

	Komedia (K)	Telenowela (T)	Dramat (D)	MIN
Komedia (K)	3 mln	1 mln	6 mln	1 mln
Telenowela (T)	4 mln	6 mln	3 mln	3 mln
Dramat (D)	2 mln	4 mln	7 mln	2 mln
MAX	4 mln	6 mln	7 mln	

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że w grze przedstawionej w Tabela 3.14 mamy dwa punkty siodłowe (T, K) oraz (T, T), oba z wypłatą 4 mln. Oznacza to, że mamy dwie równowagi w tej grze a wartość gry pozostaje na niezmiennym poziomie 4 mln. Ilustruje to ważną własność gier z wieloma punktami siodłowymi.

Punkt siodłowy a wartość gry: Jeśli gra ma więcej niż jeden punkt siodłowy, to wszystkie one mają tę samą wypłatę, czyli jest jedna wartość gry.

Z kolei w grze przedstawionej w Tabela 3.15 nie mamy żadnego punktu siodłowego, ponieważ:

$$3 \text{ mln} = \max_{\text{wiersze}} \text{minimum wiersza} < \min_{\text{kolumny}} \text{maksimum kolumny} = 4 \text{ mln}.$$

Jaka jest wartość takiej gry? Czy gra ta ma wartość? Podobnie jak w poprzednim podrozdziale konieczne jest wprowadzenie strategii mieszanych, tj. takich, które dopuszczają pewną losowość w wyborze strategii.

### 3.4.3. Równowaga w strategiach mieszanych

#### 3.4.3.1. Analityczne wyznaczanie równowagi

Wróćmy do gry w szef–pracownik przedstawionej w Tabela 3.10. Jaka jest optymalna strategia w tym przypadku? W poprzedniej części tego rozdziału doszliśmy w sposób intuicyjny do tego, że optymalna strategia to być nieprzewidywalnym. Warto jednak powtórzyć to rozumowanie raz jeszcze, dokładniej w nowym kontekście. Podobnie jak gra przedstawiona za pomocą Tabela 3.15, gra nie ma punktu siodłowego, co zademonstrowano w Tabela 3.16. Jeśli się nad tym zastanowić, nie jest to dziwne. Nie ma takiego profilu strategii, od którego nie byłoby opłacalnego odstępstwa jednego z graczy. Zgodnie z intuicją, najlepsze co w danej sytuacji może

.....  
 jedna  
 wartość gry

zrobić zarówno pracownik, jak i szef to być jak najbardziej nieprzewidywalnym, tak aby drugi nie był w stanie przewidzieć ruchu przeciwnika.

Tabela 3.16

Tabela wypłat gry szef-pracownik (gra nie ma punktu siodłowego)

	Lewy (L)	Prawy (P)	MIN
Lewy (L)	-1	+1	<b>-1</b>
Prawy (P)	+1	-1	<b>-1</b>
MAX	<b>+1</b>	<b>+1</b>	

Źródło: opracowanie własne.

Co to znaczy być nieprzewidywalnym? To znaczy grać losowo, a nie deterministycznie. Jeśli szef wiedziałby, że pracownik zawsze wybiera prawy korytarz, wówczas wiedziałby, że tam musi się właśnie zacząć. Jeśli jednak pracownik codziennie rzuca monetą i wybiera prawy korytarz, jeśli wypadnie reszka a lewy, jeśli orzeł, to szef nie będzie wiedział, gdzie się zacząć. Podobnie jest z drugiej strony. Jeśli pracownik wiedziałby, że szef zawsze czai się w lewym korytarzu, wówczas wybierałby prawy korytarz, aby go nie spotkać. Jeśli jednak szef jest nieprzewidywalny i podobnie jak pracownik rzuca monetą, aby wybrać korytarz, wówczas pracownik nie może tego wykorzystać dla swej korzyści.

Spróbujmy sformalizować tego typu analizę. Załóżmy, że szef (Kolumna) wybiera lewy korytarz z prawdopodobieństwem  $q$  oraz prawy korytarz z prawdopodobieństwem  $1 - q$ . Co powinien wówczas zrobić pracownik? Wypłata oczekiwana pracownika ( $E\Pi_{\text{pracownik}}$ ) zależy od strategii jaką wybierze:

- jeśli wybierze lewy korytarz:  $E\Pi_{\text{pracownik}}(L) = -1 \times q + 1 \times (1 - q) = 1 - 2q$ ;
- jeśli wybierze prawy korytarz:  $E\Pi_{\text{pracownik}}(P) = +1 \times q - 1 \times (1 - q) = 2q - 1$ .

Zauważmy, że:

- jeśli pierwsza wypłata jest wyższa od drugiej, tj.  $1 - 2q > 2q - 1 \Rightarrow q < \frac{1}{2}$ , to pracow-

nik powinien wybrać lewy korytarz; jego oczekiwana wypłata wynosi  $1 - 2q$  i jest dodatnia;

- jeśli natomiast pierwsza wypłata jest niższa od drugiej, tj.  $1 - 2q < 2q - 1 \Rightarrow q > \frac{1}{2}$ , to

pracownik powinien wybrać prawy korytarz; jego oczekiwana wypłata wynosi  $2q - 1$  i jest dodatnia;

- jeśli z kolei pierwsza wypłata jest równa drugiej, tj.  $1 - 2q = 2q - 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$ , to pra-

cownikowi wszystko jedno, który korytarz wybrać, jego oczekiwana wypłata tak czy owak wynosi 0.

.....  
Strategia  
mieszana

Analiza jest zgodna z intuicją. Jeśli na przykład wiadomo, że szef wybiera lewy korytarz średnio 4 na 10 razy (tj.  $q = 0,4$ ), to pracownik powinien pójść lewym korytarzem: wówczas jego oczekiwana wypłata wynosi  $1 - 2 \times 0,4 = 0,2$ , a oczekiwana wypłata szefa wynosi  $-0,2$  i jest niższa. Podobnie jeśli wiadomo, że szef wybiera lewy korytarz średnio 6 na 10 razy, wówczas opłaca się pracownikowi pójść prawym korytarzem. Oczekiwana wypłata pracownika wynosi wówczas  $2 \times 0,6 - 1 = 0,2$ , a oczekiwana wypłata szefa jest równa  $-0,2$ .

.....  
Minimax

Najlepsze, co może zrobić szef w tej sytuacji, to ustalić swoją strategię na  $q = \frac{1}{2}$ .

Tylko wówczas oczekiwana wypłata pracownika wynosi 0, niezależnie od tego, który korytarz wybierze. Zapiszmy ten fakt matematycznie w następujący sposób:

$$\min_q \max(\Pi_{\text{pracownik}}(L), \Pi_{\text{pracownik}}(P)) = \min_q (1 - 2q, 2q - 1) = 0.$$

Strategia szefa, tj. z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  wybierz lewy, a z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  wybierz prawy korytarz, będzie oznaczana jako  $\frac{1}{2} L + \frac{1}{2} P$ . Jest to przy-

kład strategii mieszanej. Już wkrótce pokażemy, że jest to strategia równowagi.

Powtórzmy teraz całe rozumowanie z perspektywy strategii pracownika. Załóżmy, że pracownik wybiera korytarz lewy z prawdopodobieństwem  $p$ , a korytarz prawy z prawdopodobieństwem  $1 - p$ . Ponieważ chcemy wszystko wyrażać za pomocą wypłat pracownika, które są ujemnymi wypłatami szefa (jego stratami), będziemy teraz prowadzić rozumowanie w kategoriach strat szefa.

Oczekiwana strata ( $ES_{\text{szef}}$ ) szefa zależy od wybranej przez niego strategii:

- jeśli wybierze lewy korytarz:  $ES_{\text{szef}}(L) = -1 \times p + 1 \times (1 - p) = 1 - 2p$ ;
- jeśli wybierze prawy korytarz:  $ES_{\text{szef}}(P) = +1 \times p - 1 \times (1 - p) = 2p - 1$ .

Zauważmy, że:

- jeśli pierwsza strata jest mniejsza od drugiej, tj.  $1 - 2p < 2p - 1 \Rightarrow p > \frac{1}{2}$ , to szef

powinien wybrać lewy korytarz; jego oczekiwana strata wynosi  $1 - 2p$  i jest ujemna (czyli wypłata jest dodatnia);

- jeśli natomiast pierwsza strata jest wyższa od drugiej, tj.  $1 - 2p > 2p - 1 \Rightarrow p < \frac{1}{2}$ , to

szef powinien wybrać prawy korytarz; jego oczekiwana strata wynosi  $2p - 1$  i jest ujemna (czyli wypłata jest dodatnia);

- jeśli z kolei pierwsza strata jest równa drugiej, tj.  $1-2p=2p-1 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$ , to szefo-

wi wszystko jedno, który korytarz wybrać, jego oczekiwana strata (tak jak i wypłata) tak czy owak wynosi 0.

Analiza jest zgodna z intuicją. Jeśli na przykład wiadomo, że pracownik wybiera lewy korytarz średnio 6 na 10 razy (tj.  $p=0,6$ ), to szef powinien pójść lewym korytarzem: wówczas jego oczekiwana strata wynosi  $1-2 \times 0,6 = -0,2$  (a zatem wypłata wynosi  $+0,2$ ), a oczekiwana wypłata pracownika wynosi  $-0,2$  i jest niższa. Podobnie, jeśli wiadomo, że pracownik wybiera lewy korytarz średnio 4 na 10 razy (tj.  $p=0,4$ ), wówczas opłaca się szefowi pójść prawym korytarzem. Oczekiwana strata szefa wynosi wówczas  $2 \times 0,4 - 1 = -0,2$  (a zatem wypłata wynosi  $+0,2$ ), a oczekiwana wypłata pracownika jest równa  $-0,2$ , a więc jest niższa.

Najlepsze, co może zrobić pracownik w tej sytuacji, to ustalić swoją strategię na

.....  
Maximin

$p=\frac{1}{2}$ . Tylko wówczas oczekiwana wypłata szefa wynosi 0, niezależnie od tego, który

korytarz wybierze. Zapiszmy ten fakt w następujący sposób:

$$\max_p \min(\text{ES}_{\text{szef}}(L), \text{ES}_{\text{szef}}(P)) = \max_p \min(1-2p, 2p-1) = 0.$$

Strategia pracownika, tj. z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  wybierz lewy, a z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  wybierz prawy korytarz, będzie oznaczana  $\frac{1}{2} L + \frac{1}{2} P$ . Jest to przykład strategii mieszanej.

Zauważmy, że jeśli teraz podsumujemy naszą analizę, to okaże się, że znalezione strategię mieszane pracownika i szefa (w tym przypadku obie są takie same i wyno-

szą  $\frac{1}{2} L + \frac{1}{2} P$ , ale nie musi tak być w ogólności) to są strategię równowagi. Okazuje

się bowiem, że profil strategii  $\left(\frac{1}{2} L + \frac{1}{2} P, \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} P\right)$  jest punktem siodłowym,

ponieważ dla wartości  $p=\frac{1}{2}$  oraz  $q=\frac{1}{2}$  jest spełniony warunek punktu siodłowego:

$$\min_q \max(1-2q, 2q-1) = \max_p \min(1-2p, 2p-1) = 0.$$

Zatem wartość gry wynosi 0.

Tabela 3.17 zawiera podsumowanie dotychczasowej analizy. Zauważmy, że po wprowadzeniu strategii mieszanej polegającej na wyborze L i P z równym prawdopodobieństwem dla każdego gracza (dodatkowy wiersz i dodatkowa kolumna), wartość minimax równa się wartości maximin i wynosi 0.

Tabela 3.17  
Tabela wypłat gry szef-pracownik (gdy dopuścimy strategię mieszane, gra ma równowagę i swoją wartość, dla której spełniony jest warunek punktu siodłowego)

	Lewy (L)	Prawy (P)	$\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}P$	MIN
Lewy (L)	-1	+1	0	-1
Prawy (P)	+1	-1	0	-1
$\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}P$	0	0	0	0
MAX	+1	+1	0	

Źródło: opracowanie własne.

Powyższa analiza obrazuje ważny rezultat teorii gier, który przytoczyliśmy już dla przypadku gier ogółem w podrozdziale 0, mianowicie, że jeśli dopuścimy strategię mieszane, to każda gra o skończonej liczbie strategii ma przynajmniej jedną równowagę.

3.4.3.2. Graficzne wyznaczanie równowagi

W tej części pokażemy, jak można wyznaczać równowagę graficznie.

Rozważmy dwie drużyny. Drużyna Sparta ma 2 zawodników A i B, a drużyna Ateny ma 3 zawodników X, Y, Z. Drużyna Ateny musi zdecydować, których zawodników (dwoje spośród trojga) ma wystawić do zawodów, natomiast obie drużyny muszą zdecydować, w jakiej kolejności ich zawodnicy będą wystawieni. Wiadomo, że zawodnik B zawsze pokonuje zawodnika Y, ale zawsze jest pokonany przez zawodników X i Z. Dodatkowo wiadomo, że zawodnik A zawsze pokonuje zawodnika Z, ale jednocześnie jest pokonany przez zawodnika Y. W walce X przeciwko A, obaj zawodnicy mają równą szansę wygranej. Przegrana w walce oznacza -1 punkt, wygrana oznacza +1 punkt, a jeśli zawodnicy mają równe szanse wygranej, to wartość oczekiwana w walce wynosi 0 punktów. Zapiszmy wypłaty drużyny Sparta, która będzie Wierszem. Wypłaty drużyny Ateny, która jest Kolumną, są odwrotnością wypłat Wiersza. Wiersz ma dwie możliwe strategię: AB i BA, oznaczające kolejność zawodników wystawionych do pierwszej i do drugiej walki. Kolumna ma 6 możliwych strategii: XY, XZ, YZ, YX, ZX i ZY. W tabeli 3.18 przedstawiono tę sytuację jako grę. Wypłata

.....  
Przykład –  
wystawianie  
zawodników

-2 na przecięciu wiersza AB i kolumny YZ oznacza, że Wiersz przegrywa dwa pojedynki, ponieważ A przegrywa z Y i B przegrywa z Z. Z kolei wypłata +1 na przecięciu wiersza BA i kolumny YX oznacza, że Wiersz wygrywa pierwszy pojedynek (B pokonuje Y) i remisuje drugi pojedynek (A względem X). Zauważmy, że nie ma dla nas znaczenia czy pojedynek A i X kończy się remisé, czy też kończy się zwycięstwem bądź porażką A z równym prawdopodobieństwem, ponieważ zakładamy, że graczy interesuje oczekiwana wypłata.

Tabela 3.18

Tabela wypłat Drużyny I w grze z Drużyną II o jak największą liczbę zwycięstw w dwóch pojedynkach

	XY	XZ	YZ	YX	ZX	ZY	MIN
AB	+1	-1	-2	-2	0	+2	<b>-2</b>
BA	-2	0	+2	+1	-1	-2	<b>-2</b>
MAX	+1	<b>0</b>	+2	+1	<b>0</b>	+2	

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że gra nie posiada równowagi w strategiach czystych, a zatem zmuszeni jesteśmy szukać równowagi w strategiach mieszanych. Tym razem sytuacja nieco się jednak komplikuje, ponieważ mamy aż sześć dostępnych strategii Kolumny. Wykorzystamy tutaj fakt, że w równowadze rozwiązanie problemu maximin jest równe problemowi minimax. Jak zostanie to pokazane w następnym podrozdziale, jest to przykład zjawiska zwanego dualnością.

W omawianym przykładzie mamy sześć strategii Kolumny, ale tylko dwie strategii Wiersza. Załóżmy zatem, że Wiersz wybiera strategię AB z prawdopodobieństwem  $p$  i strategię BA z prawdopodobieństwem  $1 - p$ . Wówczas oczekiwana strata Kolumny (pamiętajmy, że wypłaty Wiersza są stratami Kolumny)  $ES_K$  z poszczególnych strategii wynosi:

$$ES_K(XY) = p \times (+1) + (1 - p) \times (-2) = -2 + 3p,$$

$$ES_K(XZ) = p \times (-1) + (1 - p) \times (0) = -p,$$

$$ES_K(YZ) = p \times (-2) + (1 - p) \times (+2) = 2 - 4p,$$

$$ES_K(YX) = p \times (-2) + (1 - p) \times (+1) = 1 - 3p,$$

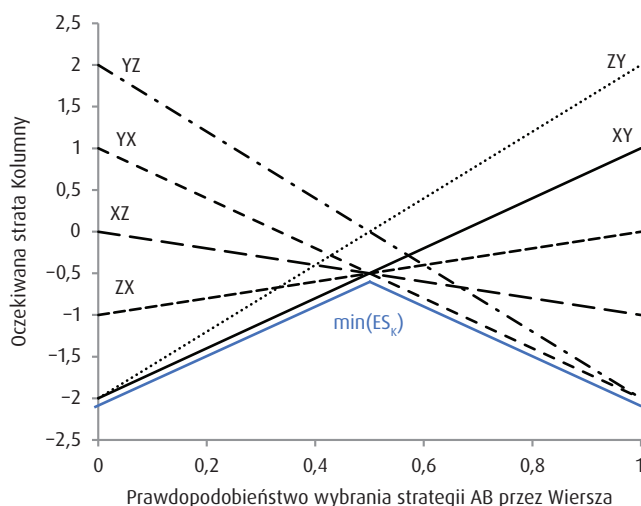
$$ES_K(ZX) = p \times (0) + (1 - p) \times (-1) = -1 + p,$$

$$ES_K(ZY) = p \times (+2) + (1 - p) \times (-2) = -2 + 4p.$$

Każda z powyższych oczekiwanych strat jest funkcją jednej zmiennej  $p$ , która może przyjmować wartości w przedziale  $[0, 1]$ , a zatem można te funkcje narysować – rysunek 3.1. Dodatkowo wiemy, że Kolumna stara się zminimalizować swoje straty, tak więc wybierze strategię, która da jej minimalną stratę przy danym poziomie  $p$ . Na przykład jeśli  $p$  wynosi 0,2, to najniższa oczekiwana strata Kolumny przypada dla strategii XY. Jeśli natomiast  $p$  wynosi 0,8, to najniższa oczekiwana strata Kolumny przypada dla strategii YX. Krzywa zaznaczona na rysunku 3.1 kolorem niebieskim i oznaczona jako  $\min(ES_K)$ <sup>8</sup> oznacza zatem minimalną oczekiwaną stratą Kolumny przy danym poziomie  $p$ , kiedy ta może wybierać optymalną dla siebie strategię. Krzywa ta pokrywa się z oczekiwaną stratą Kolumny ze strategii XY dla wartości  $p$  od 0 do 0,5, a następnie pokrywa się z oczekiwaną stratą Kolumny ze strategii YX dla wartości  $p$  od 0,5 do 1.

Rysunek 3.1

Oczekiwane straty sześciu strategii Kolumny w zależności od prawdopodobieństwa wybrania strategii AB przez Wiersza



Źródło: opracowanie własne.

Podczas gdy wybór Kolumny przekłada się graficznie na wybór punktu na jednej z sześciu prostych dla danej wartości  $p$ , to wybór Wiersza przekłada się na wybór wartości  $p$ , a więc punktu na osi X. Wartość  $p = 1$  oznacza wybór strategii AB, wartość  $p = 0$  oznacza wybór strategii BA, natomiast wartości pośrednie oznaczają strategie

<sup>8</sup> Symbol ten oznacza dla danego poziomu  $p$  minimalną oczekiwaną stratę spośród sześciu strategii Kolumny:  $\min(ES_K(XY), ES_K(XZ), ES_K(YZ), ES_K(YX), ES_K(ZX), ES_K(ZY))$



mieszane. Wiersz stara się zmaksymalizować swoją oczekiwaną wypłatę, która zarazem jest oczekiwaną stratą Kolumny. Wiersz wybierze zatem taki punkt  $p$  na osi  $X$ , aby zmaksymalizować oczekiwaną stratę Kolumny – łatwo zauważyć na wykresie, że wybierze on wartość  $p = 0,5$ , dla której wartość niebieskiej krzywej jest największa.

W ten sposób wyznaczyliśmy strategię równowagi Wiersza, która wynosi  $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BA$

(strategia mieszana: z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  zagraj strategię  $AB$  i z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  zagraj strategię  $BA$ ). Wartość gry równa się oczekiwanej wypłacie Wiersza w równowadze i wynosi  $-\frac{1}{2}$ . Wartość tę można odczytać z wykresu jako punkt na osi  $Y$ , w którym przypada najwyższy punkt niebieskiej krzywej. Zauważmy, że oczekiwana wypłata Wiersza w równowadze (mieszanej) jest korzystniejsza dla niego niż jego wypłata z jakiegokolwiek jego strategii czystych:

- gdyby wybrał strategię  $AB$ , wówczas Kolumna wybrałaby  $YZ$  lub  $YX$  i wypłata Wiersza wyniosłaby  $-2$ ,
- gdyby wybrał strategię  $BA$ , wówczas Kolumna wybrałaby  $XY$  lub  $ZY$  i wypłata Wiersza wyniosłaby  $-2$ .

Podsumowując, strategia Wiersza w równowadze wynosi  $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BA$  a oczeki-

wana wypłata Wiersza w równowadze wynosi  $-\frac{1}{2}$ . Ponieważ znamy oczekiwaną wypła-

tę Wiersza w równowadze, to znamy również oczekiwaną stratę Kolumny w równowadze, ponieważ muszą one być sobie równe.

Wiersz maksymalizuje zatem swoją oczekiwaną wypłatę poprzez optymalny wybór swoich strategii (czyli wybór wierszy w tabeli gry). Jednocześnie wiemy, że Kolumna minimalizuje swoją oczekiwaną stratę (równą oczekiwanej wypłacie Wiersza) poprzez optymalny wybór swoich strategii (czyli kolumn). W równowadze te dwa problemy mają jedno rozwiązanie, co prowadzi do zdefiniowania następującej ważnej własności:

Dualność w grach o sumie zerowej: optymalna (z punktu widzenia Wiersza) oczekiwana wypłata Wiersza w problemie wyznaczenia strategii równowagi Wiersza musi być taka sama, jak optymalna (z punktu widzenia Kolumny) oczekiwana strata Kolumny (równa oczekiwanej wypłacie Wiersza) w problemie wyznaczenia strategii równowagi Kolumny.

Powyższy wywód pozwala zidentyfikować strategię równowagi Wiersza oraz oczekiwaną wypłatę Wiersza i oczekiwaną stratę Kolumny w równowadze. Nie znamy jednak strategii równowagi Kolumny: wiemy tylko, że Kolumnie będzie wszystko jedno, czy wybrać strategię  $XY$  czy też strategię  $YX$  (oczekiwana strata Kolumny dla tych

dwóch strategii jest równa, kiedy  $p=0,5$ ). Z tego jednak, że Kolumnie jest wszystko jedno nie wynika, że powinna wybrać jedną z nich:

- gdyby wybrała strategię XY, wówczas Wiersz odszedłby od swojej strategii rów-

nowagi  $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BA$  i wybrałby strategię AB a jego wypłata (a strata Kolumny)

wyniosłaby +1,

- gdyby wybrała strategię YX, wówczas Wiersz odszedłby od swojej strategii rów-

nowagi  $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BA$  i wybrałby strategię BA a jego wypłata (a strata Kolumny)

wyniosłaby +1.

Powyższa argumentacja wskazuje, że Kolumna również musi w równowadze stosować strategię mieszaną (z jakimś prawdopodobieństwem wybierze XY a z jakimś YX), jednak przedstawiona metoda graficzna nie wskaże nam, jakie powinno być to prawdopodobieństwo. Oczywiście możemy się domyślać, że będzie to prawdopodobieństwo  $\frac{1}{2}$  ze względu na symetrię problemu, ale nie wynika to z samej metody. Do wyznaczania optymalnych strategii obu graczy w przypadku gier z więcej niż dwiema strategiami posłuży nam metoda programowania liniowego, która może być wykorzystana z pomocą arkusza kalkulacyjnego Excel.

### 3.5. Wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego w wyznaczaniu równowagi

.....  
Przykład –  
dwie firmy

Wróćmy do przykładu motywującego omówionego w podrozdziale 3.2 dotyczącego konkurencji dwóch firm – Zeusa i Ateny – o rynki zbytu. Przypomnijmy pytania, które zostały zadane: Czy menedżer Ateny powinien zaatakować któryś z rynków kontrolowanych przez Zeusa, czy też zdecydować się na obronę rynku A pozostającego pod jego kontrolą? Którego rynku powinien bronić Zeus? A może powinien zaatakować rynek A, który ma największą wartość? Czy może jest tak, że częścią optymalnej strategii firmy jest bycie nieprzewidywalnym? Jaką decyzję podejmie racjonalny menedżer Ateny? Jaką decyzję podejmie racjonalny menedżer Zeusa? Jaki będzie ostateczny wynik tej gry? Czy da się wskazać oczekiwany zysk obu firm w sytuacji, kiedy obie grają optymalnie? Mamy teraz wszystkie potrzebne elementy, aby odpowiedzieć na te pytania.

### 3.5.1. Weryfikacja, czy jest równowaga w strategiach czystych

Aby rozwiązać tę grę, najpierw zweryfikujemy, że nie ma ona punktu siodłowego w strategiach czystych. Maksymalne wartości w poszczególnych kolumnach (strategie Kolumny) są wyszczególnione w ostatnim wierszu tabeli 3.19.

**Tabela 3.19**  
**Tabela wypłat gry**

	Rynek A	Rynek B	Rynek C	Rynek D	MIN
Rynek A	4	0	0	0	<b>0</b>
Rynek B	-1	-3	4	4	-3
Rynek C	-2	3	-2	3	-2
Rynek D	-3	2	2	-1	-3
MAX	4	<b>3</b>	4	4	

Źródło: opracowanie własne.

Minimum spośród tych czterech wartości wynosi 3 (minimax) i przypada w trzeciej kolumnie, tj. dla strategii B Kolumny. Jest to najmniejsza strata Kolumny, którą ona może sobie zagwarantować w najgorszym przypadku przy wyborze strategii czystych. Z kolei minimalne wartości w poszczególnych wierszach (strategie Wiersza) widać w ostatniej kolumnie. Maksimum z tych czterech wartości wynosi 0 (maximin) i przypada dla pierwszego wiersza, tj. dla strategii A Wiersza. Jest to największa wypłata Wiersza, którą on może sobie zagwarantować w najgorszym wypadku przy wyborze strategii czystych. Ponieważ wartość minimax 3 i maximin 0 dla strategii czystych są różne od siebie, znaczy to, że nie ma równowagi w strategiach czystych. Musimy zatem szukać równowagi w strategiach mieszanych. Będziemy postępować analogicznie, jak w przypadku gier z dwiema strategiami.

### 3.5.2. Wyznaczanie równowagi w strategiach mieszanych

#### 3.5.2.1. Problem Wiersza

Rozważmy najpierw problem wyznaczenia strategii mieszanej Wiersza. Ponieważ są cztery strategie czyste Wiersza, to strategie mieszane Wiersza oznaczać będziemy poprzez cztery prawdopodobieństwa:  $(p_A, p_B, p_C, p_D)$ . Wszystkie muszą być

nieujemne ( $p_i \geq 0$ ), a razem sumować się muszą do 1 ( $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$ ). Na przykład strategia  $(p_A, p_B, p_C, p_D) = (0, 0, 1, 0)$  oznacza, że gracz wybrał strategię czystą C, a strategia

$(p_A, p_B, p_C, p_D) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$  oznacza, że wybrał strategię mieszaną  $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$  (z praw-

dopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  gra strategię B a z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  gra strategię C). Załóżmy zatem, że Wiersz stosuje strategię mieszaną  $(p_A, p_B, p_C, p_D)$ , której jeszcze w tej chwili nie znamy, ale chcemy ją wyznaczyć. Kolumna wybiera jedną ze swoich czterech strategii. Oczekiwana strata w różnych strategiach Kolumny wynosi:

$$ES_K(A) = 4p_A - 1p_B - 2p_C - 3p_D,$$

$$ES_K(B) = 0p_A - 3p_B + 3p_C + 2p_D,$$

$$ES_K(C) = 0p_A + 4p_B - 2p_C + 2p_D,$$

$$ES_K(D) = 0p_A + 4p_B + 3p_C - 1p_D.$$

Kolumna wybiera strategię (kolumna A, B, C lub D), przy której oczekiwana strata jest najniższa, czyli dla różnych strategii Wiersza  $(p_A, p_B, p_C, p_D)$  wybiera najniższą wartość z powyższych czterech wartości funkcji:

$$\min(4p_A - 1p_B - 2p_C - 3p_D, 0p_A - 3p_B + 3p_C + 2p_D, 0p_A + 4p_B - 2p_C + 2p_D, 0p_A + 4p_B + 3p_C - 1p_D).$$

Z kolei Wiersz wybiera taką strategię  $(p_A, p_B, p_C, p_D)$ , aby zmaksymalizować swoją oczekiwaną wypłatę:

$$\begin{array}{l} \text{.....} \\ \text{Problem} \\ \text{Wiersza 1} \end{array} \quad \max_{\substack{p_A, p_B, p_C, p_D \geq 0, \\ \sum p_i = 1}} \min(4p_A - 1p_B - 2p_C - 3p_D, 0p_A - 3p_B + 3p_C + 2p_D, 0p_A + 4p_B - 2p_C + 2p_D, 0p_A + 4p_B + 3p_C - 1p_D).$$

### 3.5.2.2. Postać liniowa problemu Wiersza

Powyższe sformułowanie nazywać będziemy problemem Wiersza. Ponieważ to sformułowanie jest w postaci nieliniowej (maksymalizujemy funkcję minimum, która jest nieliniowa), przekształcimy je do prostszej postaci liniowej:

$$\begin{array}{l} \text{.....} \\ \text{Problem} \\ \text{Wiersza 2} \end{array} \quad \max_{\substack{p_A, p_B, p_C, p_D \geq 0, \\ \sum p_i = 1, \\ z \in \mathbb{R}}} z$$

$$\text{p.w. } z \leq 4p_A - 1p_B - 2p_C - 3p_D,$$

$$z \leq 0p_A - 3p_B + 3p_C + 2p_D,$$

$$z \leq 0p_A + 4p_B - 2p_C + 2p_D,$$

$$z \leq 0p_A + 4p_B + 3p_C - 1p_D.$$

Co oznacza powyższe sformułowanie i dlaczego jest równoważne nieliniowej formie?

Po pierwsze, Wiersz chce zmaksymalizować swoją oczekiwaną wypłatę, stąd mamy problem maksymalizacji. Po drugie, oczekiwana wypłata Wiersza, oznaczona jako  $z$ , zależy od tego, na co Wiersz ma wpływ (jego strategia) oraz od tego, na co Wiersz nie ma wpływu (strategia Kolumny). Wiersz ma wpływ na ustalenie własnej strategii, tj. wybór prawdopodobieństwa poszczególnych wierszy  $p_A, p_B, p_C, p_D$ , które muszą spełniać warunki prawdopodobieństw (nieujemne, sumują się do 1). Wiersz nie ma wpływu na strategię Kolumny, która wybiera kolumnę o najniższej oczekiwanej stracie. Oczekiwane straty Kolumny zależą z kolei od strategii Wiersza, czyli wartości  $p_A, p_B, p_C, p_D$ .

Aby wartość  $z$  była minimalną oczekiwaną stratą Kolumny (która jest zarazem minimalną oczekiwaną wypłatą Wiersza), nie może być większa niż którakolwiek z czterech oczekiwanych strat (stąd ograniczenia). Wiemy jednak, że aby  $z$  rzeczywiście była minimum z tych czterech elementów, przynajmniej jedno z ograniczeń musi być spełnione w postaci równości (ponieważ  $\min(a, b, c, d)$  równa się przynajmniej jednemu z elementów  $a, b, c, d$ ). W optimum to wymaganie będzie spełnione, ponieważ wybieramy maksymalną wartość  $z$ , która spełnia cztery ograniczenia – gdyby wszystkie te ograniczenia spełnione były w postaci ścisłej nierówności, to wartość  $z$  można by było zwiększyć i ograniczenia pozostałyby spełnione, co oznacza, że wyjściowe  $z$  nie było maksymalne.

W powyższym problemie  $z$  występuje jednocześnie jako wartość funkcji celu, pojawia się w ograniczeniach oraz występuje jako zmienna decyzyjna, mimo iż Wiersz nie ma bezpośredniego wpływu na jej wartość. Jest to trick, który umożliwił nam przekształcenie problemu nieliniowego w problem liniowy. Kosztem jest to, że zamiast optymalizacji nieliniowej bez ograniczeń mamy do czynienia w optymalizacją liniową z czterema dodatkowymi ograniczeniami. Nie stanowi to jednak problemu w przypadku wykorzystania oprogramowania optymalizacyjnego.

### 3.5.2.3. Problem Kolumny

Zanim przejdziemy do znalezienia rozwiązania tego problemu w Excelu, warto sformułować dla kompletności problem Kolumny, choć w Excelu wystarczyć nam będzie rozwiązanie problemu Wiersza, z którego, jak się okaże, można również uzyskać rozwiązanie problemu Kolumny.

Są cztery strategie mieszane Kolumny. Oznaczmy je jako  $(q_A, q_B, q_C, q_D)$ . One również muszą być nieujemne i muszą sumować się do jedności. Załóżmy, podobnie jak wcześniej dla Wiersza, że Kolumna stosuje strategię mieszaną  $(q_A, q_B, q_C, q_D)$ , której

jeszcze nie znamy, ale chcemy ją poznać. Wiersz wybiera jedną ze swoich czterech strategii. Oczekiwane wypłaty Wiersza wynoszą:

$$E\Pi_W(A) = 4q_A + 0q_B + 0q_C + 0q_D,$$

$$E\Pi_W(B) = -1q_A - 3q_B + 4q_C + 4q_D,$$

$$E\Pi_W(C) = -2q_A + 3q_B - 2q_C + 3q_D,$$

$$E\Pi_W(D) = -3q_A + 2q_B + 2q_C - 1q_D.$$

Wiersz wybiera strategię (wiersz A, B, C lub D), przy której oczekiwana wypłata jest najwyższa, czyli dla różnych strategii Kolumny  $(q_A, q_B, q_C, q_D)$  wybiera najwyższą wartość z powyższych czterech wartości funkcji:

$$\max(4q_A + 0q_B + 0q_C + 0q_D, -1q_A - 3q_B + 4q_C + 4q_D, -2q_A + 3q_B - 2q_C + 3q_D, -3q_A + 2q_B + 2q_C - 1q_D).$$

Z kolei Kolumna wybiera taką strategię  $(q_A, q_B, q_C, q_D)$ , aby zminimalizować swoje oczekiwane straty:

.....  
Problem  
Kolumny 1

$$\min_{\substack{q_A, q_B, q_C, q_D \geq 0, \\ \sum q_i = 1}} \max(4q_A + 0q_B + 0q_C + 0q_D, -1q_A - 3q_B + 4q_C + 4q_D, -2q_A + 3q_B - 2q_C + 3q_D, -3q_A + 2q_B + 2q_C - 1q_D).$$

### 3.5.2.4. Postać liniowa problemu Kolumny

Powyższe sformułowanie nazywać będziemy problemem Kolumny. Ponieważ to sformułowanie jest w postaci nieliniowej (minimalizujemy funkcję maksimum, która jest nieliniowa), przekształcimy je do prostszej postaci liniowej:

.....  
Problem  
Kolumny 2

$$\min_{\substack{q_A, q_B, q_C, q_D \geq 0, \\ \sum q_i = 1 \\ v \in \mathbb{R}}} v$$

$$\text{p. w. } v \geq 4q_A + 0q_B + 0q_C + 0q_D,$$

$$v \geq -1q_A - 3q_B + 4q_C + 4q_D,$$

$$v \geq -2q_A + 3q_B - 2q_C + 3q_D,$$

$$v \geq -3q_A + 2q_B + 2q_C - 1q_D.$$

Po pierwsze, Kolumna chce zminimalizować swoją oczekiwaną stratę, stąd mamy problem minimalizacji. Po drugie, oczekiwana strata Kolumny oznaczona jako  $v$  zależy od tego, na co Kolumna ma wpływ (jej strategia) oraz od tego, na co Kolumna nie ma wpływu (strategia Wiersza). Kolumna ma wpływ na ustalenie własnej strategii,

tj. wybór prawdopodobieństwa poszczególnych kolumn  $q_A, q_B, q_C, q_D$ , które muszą spełniać warunki prawdopodobieństw (nieujemne, sumują się do 1). Kolumna nie ma wpływu na strategię Wiersza, który wybiera wiersz o najwyższej oczekiwanej wypłacie. Oczekiwane wypłaty Wiersza zależą z kolei od strategii Kolumny, czyli wartości  $q_A, q_B, q_C, q_D$ .

Aby wartość  $v$  była maksymalną oczekiwaną wypłatą Wiersza, nie może być mniejsza niż którakolwiek z czterech oczekiwanych wypłat (stąd ograniczenia). Wiemy jednak, że aby  $v$  rzeczywiście była maksimum z tych czterech elementów, przynajmniej jedno z ograniczeń musi być spełnione w postaci równości (ponieważ  $\max(a, b, c, d)$  równa się przynajmniej jednemu z elementów  $a, b, c, d$ ). W optimum to wymaganie będzie spełnione, ponieważ wybieramy minimalną wartość  $v$ , która spełnia cztery ograniczenia — gdyby wszystkie te ograniczenia spełnione były w postaci ścisłej nierówności, to wartość  $v$  można by było zmniejszyć i ograniczenia pozostałyby spełnione, zatem oryginalne  $v$  nie było minimalne.

W powyższym problemie  $v$  występuje jednocześnie jako wartość funkcji celu, pojawia się w ograniczeniach, oraz występuje jako zmienna decyzyjna, mimo iż Kolumna nie ma bezpośredniego wpływu na jej wartość. Jest to trick, który umożliwił nam przekształcenie problemu nieliniowego w problem liniowy. Teraz możemy przejść do rozwiązywania problemu w Excelu. Będziemy rozwiązywać problem Wiersza.

Ramka 3.1. Jak to zrobić w programie Excel?

0,659176029962547								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Strategie Kolumny						Strategia mieszana Wiersza
4		A	B	C	D			
5	Strategie Wiersza	A	4	0	0	0		125/267
6		B	-1	-3	4	4		10/89
7		C	-2	3	-2	3		14/89
8		D	-3	2	2	-1		70/267
9	Wartość oczekiwana		176/267	176/267	176/267	176/267		1
10			>=	>=	>=	>=		
11			176/267	176/267	176/267	176/267		
12								

W pliku Excela Rozdział\_3\_1.xlsx w zakładce „Ramka 3.1a Problem Wiersza” znajduje się zadanie programowania liniowego opisanego jako „Problem Wiersza 2” powyżej.

W komórkach C5:F8 zapisano wypłaty Wiersza dla różnych profili strategii graczy. W komórkach H5:H8 zapisano poszukiwaną strategię mieszaną Wiersza. Na tej podstawie są liczone oczekiwane straty Kolumny dla różnych jej strategii (C9:F9) jako suma iloczynów odpowiedniej Kolumny wypłat Wiersza (strat Kolumny) i strategii mieszanej Wiersza.



cd. ramki 3.1

Komórka I9 zawiera szukaną wartość gry wyrażoną jako oczekiwana wypłata Wiersza. Komórki zawierające wartości ułamkowe zostały sformatowane jako wartości ułamkowe do trzech cyfr, ponieważ rozwiązania to wartości ułamkowe z mianownikiem trzycyfrowym. Zmienne decyzyjne problemu to strategia mieszana Wiersza oraz wartość gry. Funkcja celu to wartość gry i jest ona maksymalizowana. Wartość gry powinna pojawić się w każdej z komórek C11:F11. Należy zatem uzupełnić =I\$9 w komórce C11 i następnie przeciągnąć tę formułę na pozostałe komórki zakresu C11:F11. Ograniczenia są następujące: zmienne reprezentujące strategię mieszaną Wiersza są nieujemne oraz sumują się do 1 (ich suma zapisana jest w komórce H9); każda z oczekiwanych strat Kolumny jest nie mniejsza niż wartość gry.

Parametry dodatku Solver

Ustaw cel:

Na: ☒ Maks ☐ Min ☐ Wartość:

Przez zmienianie komórek zmiennych:

Podlegających ograniczeniom:

☐ Ustaw wartości nieujemne dla zmiennych bez ograniczeń

Wybierz metodę rozwiązywania:

Metoda rozwiązywania

W przypadku gładkich nieliniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat nieliniowy GRG. Dla liniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat LP simpleks, natomiast w przypadku problemów, które nie są gładkie, wybierz aparat ewolucyjny.

Po uzyskaniu rozwiązania przy wykorzystaniu dodatku Solver wybieramy opcję stworzenia Raportu wrażliwości

**Wyniki dodatku Solver**

Dodatek Solver znalazł rozwiązanie. Wszystkie ograniczenia i warunki optymalizacji są spełnione.

☒ Zachowaj rozwiązanie dodatku Solver  
☐ Przywróć wartości pierwotne

☐ Powróć do okna dialogowego parametrów dodatku Solver

☐ Raporty konspektu

**Raporty**

Wyników  
**Wrażliwości**  
 Granic

OK Anuluj Trwa zapisywanie sce

**Raporty**

Umożliwia utworzenie określonego typu raportu i umieszcza każdy raport w oddzielnym arkuszu tego skoroszytu.

Raport ten znajduje się w zakładce „Ramka 3.1b Raport p. Wiersza”. Zawiera on rozwiązanie problemu optymalizacyjnego Wiersza, tj. wartość gry w komórce D13 oraz strategię mieszaną Wiersza w komórkach D9:D12 w postaci liczb z rozwinięciem dziesiętnym, tj. niesformatowanym do postaci ułamkowej (sprawdź, czy rozwiązanie jest to samo poprzez sformatowanie tych komórek). Zawiera on również inne informacje, do których wrócimy za chwilę.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 14.4 Raport wrażliwości							
2	Arkusz: [NDM_rodz zadanie - ML - excel.xlsx]Problem Wiersza							
3	Raport utworzony: 25.10. 11:55:03							
4								
5								
6	Komórki zmiennych							
7								
8	Komórka	Nazwa	Końcowa wartość	Koszt zmniejszony	Współczynnik funkcji celu	Dopuszczalny wzrost	Dopuszczalny spadek	
9	\$H\$5	A Strategia mieszana Wiersza	0,468164794	0	0	1,23943662	2,628571429	
10	\$H\$6	B Strategia mieszana Wiersza	0,112359551	0	0	2,044444444	3,368421053	
11	\$H\$7	C Strategia mieszana Wiersza	0,157303371	0	0	1,46031746	2,347826087	
12	\$H\$8	D Strategia mieszana Wiersza	0,262172285	0	0	2,571428571	1,260273973	
13	\$I\$9	Wartość oczekiwana strategii Kolumny Wartość gry	0,65917603	0	1	1E+30	1	
14								
15	Ograniczenia							
16								
17	Komórka	Nazwa	Końcowa wartość	Cena dualna	Prawa strona ograniczenia	Dopuszczalny wzrost	Dopuszczalny spadek	
18	\$C\$9	Wartość oczekiwana strategii Kolumny A	0,65917603	-0,164794007	0	4	3,521126761	
19	\$D\$9	Wartość oczekiwana strategii Kolumny B	0,65917603	-0,359550562	0	1,052631579	3,111111111	
20	\$E\$9	Wartość oczekiwana strategii Kolumny C	0,65917603	-0,303370787	0	1,217391304	2,222222222	
21	\$F\$9	Wartość oczekiwana strategii Kolumny D	0,65917603	-0,172284644	0	1,917808219	1,333333333	
22	\$H\$9	Wartość oczekiwana strategii Kolumny Strategia mieszana Wiersza	1	0,65917603	1	1E+30	1	
23								

Przejdźmy teraz do zakładki „Ramka 3.1c Problem Kolumny”, w której zaimplementowany jest „Problem Kolumny 2” opisany w tekście.

cd. ramki 3.1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3			Strategie Kolumny				Wartość oczekiwana strategii Wiersza		
4			A	B	C	D			
5	Strategie Wiersza	A	4	0	0	0		<=	176/267
6		B	-1	-3	4	4		<=	176/267
7		C	-2	3	-2	3		<=	176/267
8		D	-3	2	2	-1		<=	176/267
9									
10	Strategia mieszana Kolumny		44/267	32/89	27/89	46/267	1		
11						Wartość gry	176/267		
12									

Tabela wypłat (komórki C5:F8) jest identyczna jak w przypadku Problemu Wiersza. Szukamy teraz strategii mieszanej Kolumny (komórki C10:F10). Wartości oczekiwane wypłat Wiersza dla różnych strategii Wiersza (komórki G5:G8) liczymy jako sumę iloczynów odpowiedniego wiersza wypłat i wiersza strategii mieszanej Kolumny. W komórkach I5: I8 kopiujemy wartość gry z komórki G11. Zmienne decyzyjne problemu to strategia mieszana Kolumny oraz wartość gry. Funkcja celu to wartość gry i jest ona minimalizowana. Ograniczenia są następujące: zmienne reprezentujące strategię mieszaną Kolumny są nieujemne oraz sumują się do 1 (ich suma zapisana jest w komórce G10); każda z oczekiwanych wypłat Wiersza jest nie większa niż wartość gry.

Parametry dodatku Solver

Ustaw cel:

Na: ☐ Maks ☒ Min ☐ Wartość:

Przez zmienianie komórek zmiennych:

Podlegających ograniczeniom:

Dodaj
Zmień
Usuń
Resetuj wszystkie
Załaduj/zapisz

☐ Ustaw wartości nieujemne dla zmiennych bez ograniczeń

Wybierz metodę rozwiązywania:

Metoda rozwiązywania  
W przypadku gładkich nieliniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat nieliniowy GRG. Dla liniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat LP simpleks, natomiast w przypadku problemów, które nie są gładkie, wybierz aparat ewolucyjny.

Pomoc Rozwiąż Zamknij

Po uzyskaniu wyników (również i tutaj komórki wartości zmiennych decyzyjnych i ograniczeń są sformatowane jako wartości ułamkowe do trzech cyfr) możemy wybrać Raport wrażliwości, który jest umieszczony w zakładce „Ramka 3.1d Raport p. Kolumny”:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 14.4 Raport wrażliwości							
2	Arkusz: [NDM_rozdz 4a - ML - excel.xlsx]Problem Kolumny							
3	Raport utworzony: 19.12.2016 15:08:19							
4								
5								
6	Komórki zmiennych							
7								
8	Komórka	Nazwa	Końcowa wartość	Koszt zmniejszony	Współczynnik funkcji celu	Dopuszczalny wzrost	Dopuszczalny spadek	
9	\$C\$10	Strategia mieszana Kolumny A	0,164794007	0	0	3,521126761	4	
10	\$D\$10	Strategia mieszana Kolumny B	0,359550562	0	0	3,111111111	1,052631579	
11	\$E\$10	Strategia mieszana Kolumny C	0,303370787	0	0	2,222222222	1,217391304	
12	\$F\$10	Strategia mieszana Kolumny D	0,172284644	0	0	1,333333333	1,917808219	
13	\$G\$11	Wartość gry Wartość oczekiwana strategii Wiersza	0,65917603	0	1	1E+30	1	
14								
15	Ograniczenia							
16								
17	Komórka	Nazwa	Końcowa wartość	Cena dualna	Prawa strona ograniczenia	Dopuszczalny wzrost	Dopuszczalny spadek	
18	\$G\$10	Strategia mieszana Kolumny Wartość oczekiwana strategii Wiersza	1	0,65917603	1	1E+30	1	
19	\$G\$5	A Wartość oczekiwana strategii Wiersza	0,65917603	-0,468164794	0	2,628571429	1,23943662	
20	\$G\$6	B Wartość oczekiwana strategii Wiersza	0,65917603	-0,112359551	0	3,368421053	2,044444444	
21	\$G\$7	C Wartość oczekiwana strategii Wiersza	0,65917603	-0,157303371	0	2,347826087	1,46031746	
22	\$G\$8	D Wartość oczekiwana strategii Wiersza	0,65917603	-0,262172285	0	1,260273973	2,571428571	
23								

Również ten raport zawiera rozwiązanie problemu optymalizacji, w tym przypadku problemu Kolumny, które znajduje się w postaci z rozwinięciem dziesiętnym w komórkach D9:D12.

Należy zwrócić uwagę na dwie prawidłowości:

1. Wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego Wiersza i wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego Kolumny są identyczne. Przekładając na język teorii gier, oznacza to, że to minimalna oczekiwana wypłata, którą może sobie zagwarantować Wiersz jest równa maksymalnej oczekiwanej stracie, którą może sobie zapewnić Kolumna.
2. Ceny dualne w Raporcie p. Wiersza są odwrotnością (różnią się tylko znakiem) rozwiązania Problemu Kolumny. I analogicznie ceny dualne w Raporcie p. Kolumny są odwrotnością rozwiązania Problemu Wiersza. Ponieważ nie widać tego bezpośrednio z uwagi na inne formatowanie rozwiązań optymalnych (postać ułamkowa do trzech cyfr) i cen dualnych (postać z rozwinięciem dziesiętnym), zachęcamy Czytelnika, aby sprawdził ten fakt.

Te dwie prawidłowości są bardzo pomocne w praktycznym rozwiązywaniu gier o sumie zerowej, tj. takich jak ta, którą tutaj opisujemy. Aby rozwiązać problem Kolumny po uprzednim rozwiązaniu problemu Wiersza, wystarczy sporządzić Raport wrażliwości problemu Wiersza i odczytać optymalne rozwiązanie problemu Kolumny na podstawie cen dualnych. I odwrotnie, aby rozwiązać problem Wiersza po uprzednim rozwiązaniu problemu Kolumny, wystarczy sporządzić Raport wrażliwości problemu Kolumny i odczytać stamtąd szukane rozwiązanie. Oznacza to również, że możemy wybrać problem, który chcemy rozwiązać (Wiersza lub Kolumny).

Źródło: opracowanie własne.

### 3.6. Podsumowanie

Teoria gier jest stosunkowo nowym działem ekonomii i matematyki (jej początek datuje się na schyłek II wojny światowej), który zajmuje się strategicznymi interakcjami pomiędzy autonomicznymi podmiotami. Modele gier są tak uproszczone i wyidealizowane, że możliwe jest uchwycenie istoty sytuacji i interakcji poszczególnych podmiotów podejmujących decyzje i wynikających z nich implikacji, co więcej język tych modeli, nawiązując do gier towarzyskich, odarty z kontekstu psychologicznego i społecznego, koncentruje się w sposób beznamiętny na istocie modelowanego problemu. Taka strategia przypomina podejście fizyka, który aby wyznaczyć tor pocisku, jako punkt wyjścia rozwiązuje równania wyidealizowanego modelu trajektorii kuli, pomijając opór powietrza i otrzymuje fragment paraboli, a dopiero w praktycznym zastosowaniu tej analizy wprowadza poprawki uwzględniające ten opór, otrzymując krzywą opisującą trajektorię (balistę). Podobnie w przypadku teorii gier, wyniki uproszczonych modeli stosuje się do szerokiej gamy sytuacji rzeczywistych.

Kiedy na przykład jeden sprzedawca wkracza w obszar sprzedaży drugiego sprzedawcy bądź kiedy jeden kraj OPEC staje przed pokusą wypuszczenia na rynek większej niż ustalona przez kartel liczby baryłek ropy, mamy do czynienia z sytuacjami, których istotę można reprezentować za pomocą dylematu więźnia. Z kolei, kiedy różne podmioty stają przed koniecznością zgrania się co do wkładanego wysiłku, tak aby osiągnąć zamierzony efekt, mamy do czynienia z podobnym mechanizmem, jak w grze koordynacji. Autorzy niniejszej książki mieli podobny problem: każdy z nich miał dylemat, czy włożyć wysiłek w ukończenie swojego rozdziału, nie mając pewności, czy inni postąpią tak samo, czy też poczekać aż będzie pewne, że inni pracują w pocie czoła i horyzont ich pracy jest już widoczny. W takich sytuacjach ważne jest, aby prawidłowo zdiagnozować typ interakcji strategicznych, tylko wtedy bowiem można skutecznie przeciwdziałać niekorzystnym implikacjom. Sprzedawcy mogą podpisać porozumienie wraz z odpowiednimi klauzulami dotyczącymi konsekwencji odstąpienia od porozumienia. OPEC może wdrożyć procedury monitorowania produkcji ropy naftowej przez poszczególne kraje tworzące kartel i ustanowić konkretne kary za nadprodukcję, które przewyższają zysk z naruszenia postanowień. Redaktorzy książki wprowadzają natomiast harmonogram prac i określają konsekwencje niewywiązania się z niego poszczególnych autorów w taki sposób, aby opłacało się im ukończyć pracę na czas. Rolą menedżera w firmie jest identyfikacja różnych sytuacji strategicznych zachodzących wewnątrz i na zewnątrz firmy i takie ich ukierunkowywanie, aby zminimalizować negatywne ich skutki dla firmy.

### 3.7. Dodatek: Czy teoria gier dobrze przewiduje ludzkie wybory?

Teoria gier dostarcza rekomendacji, które strategie w grze powinny zostać wybrane przez graczy. Ważną częścią argumentacji, że równowaga stanowi wzajemnie najlepsze odpowiedzi na strategię przeciwnika, jest założenie wspólnej wiedzy o racjonalności. Według tego założenia, nie dość, że każdy z graczy jest racjonalny (maksymalizuje swoją oczekiwaną użyteczność), to jeszcze każdy wie, że jego przeciwnik jest racjonalny, każdy wie, że każdy wie, że jego przeciwnik jest racjonalny itd. W praktyce to założenie wcale nie musi być spełnione. Ludzie popełniają błędy, są rozkojarzeni, czasem nie są w stanie wyznaczyć optymalnej strategii, a czasem nie znają swojego przeciwnika na tyle, aby być pewnym, że zagra racjonalnie. Na przykład, grając w szachy, może się zdarzyć, że wolelibyśmy cofnąć swój poprzedni ruch, gdyż nie zauważyliśmy, że oddaliśmy przeciwnikowi figurę „za darmo”. Innym razem możemy próbować podpuścić przeciwnika, pozornie oferując mu swoją figurę, jednocześnie mając przygotowaną zasadzkę w postaci sekwencji ruchów prowadzących do dania przeciwnikowi mata.

Nawet jeżeli gracz jest w pełni racjonalny, to w sytuacji, gdy nie ma pewności, co do zachowania przeciwnika, wybranie strategii równowagi wcale nie musi być najlepszą odpowiedzią na ruch przeciwnika. W takim przypadku dobry gracz będzie umiał przewidzieć ruch przeciwnika i wybrać taką swoją strategię, która stanowi najlepszą odpowiedź na ten ruch.

Rodzi się pytanie, na ile ludzie rzeczywiście grają zgodnie z przewidywaniami teorii gier. Odpowiedzią na to pytanie zajmuje się dział teorii gier zwany behawioralną teorią gier.

W artykule „Ten little treasures of game theory and ten intuitive contradictions” Goeree i Holt (2001, s. 1402–1422) omawiają wyniki eksperymentów dotyczących serii dwuosobowych gier, które są rozgrywane tylko raz. Te gry obejmują standardowe kategorie: gry statyczne i dynamiczne z zupełną i niezupełną informacją. W przypadku każdej gry tzw. skarb oznacza taki dobór parametrów tej gry, że obserwowane zachowania w tych grach są zgodne z przewidywaniami równowagi Nasha lub odpowiedniego jej odpowiednika w grach dynamicznych lub z niezupełną informacją. Dla każdego „skarbu” zmieniono kluczowy parametr wypłaty w sposób, który nie zmienia przewidywań równowagi, ale ta teoretycznie neutralna zmiana w wypłacie ma duży wpływ na obserwowane zachowanie, prowadząc do rozbieżności pomiędzy przewidywaniami teorii gier i rzeczywistymi zachowaniami. Te sprzeczności są zgodne z intuicją ekonomiczną, jednak brak jest zadowalającego wyjaśnienia teoretycznego dla nich.



Dalej przedstawimy dwie spośród analizowanych w artykule Goeree, Holt (2001) gier, omówimy na czym polegają odstępstwa od przewidywań teorii gier dla tych gier i zaproponujemy wyjaśnienie dla tych odstępstw.

### 3.7.1. Dylemat Podróżnika

Pierwszą z gier jest tzw. dylemat podróżnika. Gra została wprowadzona w pracy Basu (1994). Wyobraźmy sobie, że linia lotnicza zgubiła dwie walizki, każda należąca do jednego z dwóch podróżnych. Walizki były identyczne i miały taką samą zawartość. Linia oferuje odszkodowanie za ich zgubienie w kwocie pomiędzy 180 a 300 USD. Aby określić wartość walizek, ich właściciele proszeni są niezależnie od siebie o napisanie kwoty – wyrażonej w dolarach i w liczbach całkowitych – której oczekują – nie mniejszej niż 180 i nie większej niż 300. Jeśli napiszą taką samą kwotę, zostanie ona uznana za wiążącą i obaj otrzymają odszkodowanie tej wysokości. Jeśli napiszą różne kwoty, za wiążącą zostanie uznana niższa kwota. Dodatkowo, ten, kto napisze niższą kwotę, dostanie bonus w wysokości  $R$  USD, gdzie  $R > 1$ , a ten, kto napisze wyższą, straci  $R$  USD ze swojego odszkodowania.

Równowagą tej gry jest dla każdego z graczy napisanie 180 USD. Strategia tej równowagi jest jedyną, która zostanie po przeprowadzeniu tzw. iteracyjnej eliminacji strategii, które nigdy nie są najlepszą odpowiedzią na jakąkolwiek strategię przeciwnika. Zweryfikujmy to stwierdzenie.

Jakiegokolwiek sumy od 181 do 300 by mój przeciwnik nie wpisał, moją najlepszą odpowiedzią byłoby wpisać sumę o jeden niższą od niego/niej. Na przykład jeżeli przeciwnik wpisałby 300, a ja 299, to moja wypłata wyniesie  $299 + R > 300$ . Każda inna suma wpisana przeze mnie dałaby mi mniejszą wypłatę, np. gdybym wpisał 300, dostałbym 300, gdybym wpisał 288, dostałbym  $288 + R$  itd. Zauważmy, że wpisanie 300 nigdy nie jest najlepszą odpowiedzią, niezależnie co wpisze mój przeciwnik. Strategia 300 może zatem zostać usunięta z listy moich strategii. Ponieważ gra jest symetryczna (nie ma w niej znaczenia, czy wybieramy wiersze, czy kolumny), strategia 300 może zostać usunięta także z listy strategii mojego rywala. Bez strategii 300 dla obu graczy, łatwo zweryfikować, że strategia 299 nie jest najlepszą odpowiedzią na żaden ruch przeciwnika. Stąd w kolejnym etapie eliminujemy również tę strategię ze zbioru dostępnych dla graczy strategii. Proces ten powtarzany jest sukcesywnie do momentu, kiedy zostały wyeliminowane wszystkie strategie z wyjątkiem strategii 180. Ta strategia nie może być wyeliminowana, gdyż jest najlepszą odpowiedzią na strategię 180 przeciwnika. Zatem profil strategii (180, 180) jest równowagą tej gry<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Mówimy, że strategia 180 jest jedyną strategią racjonalizowalną (*rationalizable strategy*) w tej grze.

Równowaga tej gry wynosi (180, 180) niezależnie od wysokości kwoty  $R$ , która jest dodawana lub odejmowana od kwoty odszkodowania. Jeżeli  $R$  wynosi na przykład 180, to równowaga ta wydaje się poprawnie wskazywać strategię, które rzeczywiście są wybierane w eksperymentach. Wydaje się jednak, że jeżeli kara  $R$  wynosi na przykład 5 USD, to jest bardzo prawdopodobne, że ludzie wcale nie będą pisali najniższej możliwej kwoty zgodnie z przewidywaniami teorii gier i że będą chcieli spróbować uzyskać wyższą wypłatę niż tę, którą dostaliby w równowadze. Przecież, grając zgodnie z przewidywaniami teorii gier i pisząc kwotę 180, mogą liczyć na wypłatę 180 (jeżeli przeciwnik zagra tak samo) lub 185, jeżeli przeciwnik wybierze wyższą kwotę. Natomiast pisząc kwotę na przykład 295, w najgorszym wypadku otrzymają wypłatę 175 (jeżeli przeciwnik zagra strategię równowagi), ale mogą liczyć na dużo wyższą wypłatę w przypadku, gdy przeciwnik, podobnie jak oni, napisze wysoką kwotę (jeżeli przeciwnik również napisze 295, wówczas oboje otrzymają wypłatę 295).

Potwierdzają to wyniki eksperymentu przeprowadzonego przez Goeree i Holta. W przypadku gdy kara  $R$  wynosiła 180 USD, wówczas prawie 80% z 50 graczy uczestniczących w eksperymencie napisała liczbę z przedziału 180–190. W sytuacji, gdy kara  $R$  wynosiła 5 USD, podobna część uczestników napisała liczbę z przedziału 290–300. Powstaje pytanie, dlaczego w pierwszym przypadku teoria gier całkiem dobrze przewiduje rzeczywiste zachowania graczy, podczas gdy w drugim jest zupełnie na odwrót.

Aby odpowiedzieć na to pytanie, poniżej proponujemy autorską hipotezę.

Należy oczekiwać, że w eksperymentach, takich jak przeprowadzili Goeree i Holt, założenie wspólnej wiedzy o racjonalności nie jest spełnione. Gracze nie mogą być pewni racjonalności swoich przeciwników, którzy zostali losowo dobrani, aby utworzyć rywalizujące ze sobą pary. Nieprzewidywalny przeciwnik może być traktowany po trochu, jak natura. Być może zatem możemy zastosować metody poznane w rozdziale 2 i dotyczące podejmowania decyzji w warunkach niepewności. Zauważmy, że w sytuacji, kiedy kara  $R$  wynosi 5 USD, zagranie strategii równowagi oznacza zgodę na niską wypłatę, podczas gdy napisanie wysokiej kwoty w przedziale 290–300, daje nam szansę na dużo wyższą wygraną. Z kolei, w sytuacji, gdy kara  $R$  wynosi 180 USD, napisanie wysokiej kwoty jest bardzo ryzykowne (mogę nie dostać w ogóle odszkodowania), a wybranie strategii równowagi daje nam gwarancję otrzymania przynajmniej 180 USD odszkodowania. Hipoteza, którą stawiamy brzmi następująco: ludzie będą wybierali strategię równowagi, jeżeli inne strategie są ryzykowne i ich wybranie może wiązać się z dużą potencjalną stratą. Z kolei, jeżeli strategia alternatywna do strategii równowagi daje nam szansę na wysoką wygraną, a przy tym nie wiąże się z możliwością dużej straty, to ludzie będą wykazywali tendencję do wybierania tej właśnie strategii zamiast strategii równowagi.



Aby zoperacjonalizować powyższą hipotezę, potrzebujemy zdefiniować pojęcie ryzykowności strategii. Zgodnie z naszą hipotezą dobrym sposobem na określenie ryzykowności strategii jest maksymalny żal. Ludzie będą zatem wykazywali tendencję do wybierania strategii, która minimalizuje maksymalny żal zgodnie z regułą Savage'a przedstawioną w rozdziale 2.

Zweryfikujmy powyżej postawioną hipotezę. W pliku Rozdział\_3\_2.xlsx w arkuszu „Dylemat podróżnika” wyznaczamy strategię Wiersza w dylemacie podróżnika, która charakteryzuje się najniższym maksymalnym żalem. W komórce B251 należy wpisać wartość parametru kary  $R$  jako liczbę całkowitą. Zauważmy, że dla wartości  $R = 5$ , strategie, które minimalizują maksymalny żal to strategie w przedziale 290–300. Z kolei dla wartości  $R = 180$ , jedyna strategia, która minimalizuje maksymalny żal to strategia 180. Oznacza to, że zaproponowana hipoteza sprawdza się całkiem dobrze w grze dylemat podróżnika.

#### Jak wyznaczyć strategię minimaksu żalu dla dylematu podróżnika w programie Excel?

W pliku Rozdział\_3\_2.xlsx w arkuszu „Dylemat podróżnika” wyznaczono strategię minimaksu żalu. Poniżej znajduje się opis implementacji:

1. Określamy parametr  $R$  w komórce B251 jako liczbę całkowitą od 2 do 180.
2. Tworzymy tabelę wypłat Wiersza w następujący sposób:
  - a. Wypisujemy strategie graczy poprzez zapisanie liczb całkowitych kolejno od 180 do 300 pionowo w kolumnie B3:B123 oraz poziomo w wierszu C2:DS2.
  - b. Wyznaczamy wypłatę Wiersza dla profilu strategii (180, 180) w komórce C3 poprzez wpisanie następującej formuły:
 
$$=JEZELI(C\$2>\$B3;MIN(C\$2;\$B3)+\$B\$251;JEZELI(C\$2=\$B3;MIN(C\$2;\$B3);MIN(C\$2;\$B3)-\$B\$251))$$
  - c. Ta formuła może zostać skopiowana do wszystkich pozostałych komórek w zakresie C3:DS123.
3. Tworzymy tabelę żalu Wiersza w następujący sposób:
  - a. Wypisujemy strategie graczy poprzez zapisanie liczb całkowitych kolejno od 180 do 300 pionowo w kolumnie B126:B246 oraz poziomo w wierszu C125:DS125.
  - b. Wyznaczamy żal Wiersza dla profilu strategii (180, 180) w komórce C126 poprzez wpisanie następującej formuły „=MAX(C\\$3:C\\$123)-C3”.
  - c. Ta formuła może zostać skopiowana do wszystkich pozostałych komórek w zakresie C126:DS246.
4. Wyznaczamy maksymalny żal dla każdej strategii Wiersza poprzez wpisanie formuły „=MAX(C126:DS126)” do komórki A126. Ta formuła może zostać skopiowana do wszystkich pozostałych komórek w zakresie A126:A246.
5. Wyznaczamy minimum spośród maksymalnych żalów dla wszystkich strategii Wiersza poprzez wpisanie formuły „=MIN(A126:A246)” w komórce A247.
6. Wyznaczamy najniższą ze strategii charakteryzujących się wartością maksymalnego żalu wyznaczoną w punkcie 5 poprzez wpisanie formuły „=WYSZUKAJ.PIONOWO(A247;A126:B246;2;FAŁSZ)” w komórkę A248.

### 3.7.2. Koordynacja wysiłku

Druga z omawianych w tym podrozdziale gier dotyczy koordynacji, która jest istotnym elementem współpracy biznesowej. Dwóch kontrahentów (Krysia i Paweł) uczestniczy we wspólnym Projekcie i wybiera niezależnie i jednocześnie<sup>10</sup> poziom swojego zaangażowania/wysiłku, który przeznaczają na ten Projekt.

W eksperymencie Goeree i Holta poziom wysiłku jest liczbą całkowitą z zakresu 110–170. Powodzenie Projektu zależy od zaangażowania obojga graczy. Graczom zależy zarówno na powodzeniu Projektu, jak i włożeniu możliwie najmniejszego wysiłku w Projekt. Wpłata jednego i drugiego gracza jest liczona analogicznie. Wpłata gracza jest określona jako różnica pomiędzy minimum z wysiłku włożonego przez obojga graczy (określająca wartość produktu powstałego w wyniku Projektu) i poziomu wysiłku włożonego przez gracza pomnożonego przez współczynnik kosztu jednostki wysiłku  $c$ . Koszt jednostki wysiłku jest liczbą rzeczywistą z przedziału  $(0, 1)$  i jest wspólny dla obojga graczy.

Na przykład, jeżeli Krysia wybierze poziom wysiłku 140, a Paweł 130, natomiast koszt jednostki wysiłku wynosi 0,3, wówczas wypłata Krysi wynosi:  $\min(140, 130) - 0,3 \times 140 = 130 - 42 = 88$ , natomiast wypłata Pawła wynosi  $\min(140, 130) - 0,3 \times 130 = 130 - 39 = 91$ .

Niezależnie od poziomu kosztu jednostki wysiłku, równowagą tej gry jest każdy wspólny poziom wysiłku. Aby to wykazać, załóżmy, że Krysia i Paweł wybrali jeden poziom wysiłku  $w \in \{110, 111, \dots, 170\}$ . Profil ich strategii wynosi zatem  $(w, w)$ . Pawłowi nie opłaca się wybrać innego poziomu wysiłku, jeżeli Krysia wybrała poziom  $w$ . Jeżeli wybrałby wyższy poziom, minimum obu wysiłków pozostanie niezmienione, natomiast zwiększyłby się całkowity koszt wysiłku. Jeżeli z kolei wybrałby niższy poziom, wówczas co prawda zmniejszyłby się dla niego całkowity koszt wysiłku, jednak minimum z obu wysiłków (wartość Produktu) również by się zmniejszyło, przy czym to drugie zmniejszyłoby się bardziej, gdyż koszt jednostki wysiłku jest mniejszy niż 1. Najlepszą zatem odpowiedzią Pawła na wybór przez Krysię poziomu wysiłku  $w$  jest wybór tego samego poziomu wysiłku. Analogicznie w przypadku Krysi. Najlepszą jej odpowiedzią na wybór przez Pawła poziomu wysiłku  $w$  jest wybranie przez nią tego samego poziomu wysiłku.

Zauważmy, że przewidywania teorii gier są w przypadku tej konkretnej gry dość mało precyzyjne. Równowagą jest każdy wspólny poziom wysiłku włożony przez

<sup>10</sup> Jednocześnie nie musi oznaczać tego samego czasu, ale oznacza, że żaden gracz w momencie wyboru swojej strategii nie zna wyboru, którego dokonał przeciwnik.

graczy – oznacza to 61 równowag w strategiach czystych<sup>11</sup>. Gdyby Krysia z Pawłem mogli się naradzić ze sobą, wówczas mogliby ustalić, że oboje wybiorą najwyższy poziom wysiłku. Żadnemu z nich nie opłacałoby się zrobić inaczej niż ustalili, otrzymaliby przy tym każdy najwyższą możliwą wypłatę równą  $170(1 - c)$ .

Istnieją jednak sytuacje, w których gracze nie mogą się naradzić ze sobą przed podjęciem decyzji. Wówczas nie jest jasne, jakie poziomy wysiłku zostałyby wybrane przez Krysię i Pawła. Zauważmy, że jeżeli koszt jednostki wysiłku jest wysoki, wówczas ryzykowne wydaje się wybranie wysokiego poziomu wysiłku. Jeżeli bowiem rywal wybierze niski poziom wysiłku, będziemy się musieli pogodzić z dużą stratą. Z kolei, jeżeli koszt jednostki wysiłku jest niski, wydaje się, że gracze niewiele mogą stracić, wybierając wysoki poziom wysiłku – nawet jeżeli rywal nie będzie jednakowo skłonny do włożenia wysiłku w Projekt, koszt, który poniesiemy nie będzie w końcu aż tak wysoki.

Zgodnie z powyższą intuicją, w eksperymencie przeprowadzonym przez Goeree i Holta, jeżeli koszt jednostki wysiłku ustalono na poziomie 0,9, wówczas ponad 50% graczy wybrało niski poziom wysiłku, tj. wartość w przedziale 110–120. Z kolei w sytuacji, gdy koszt jednostki wysiłku ustalono na poziomie 0,1, wówczas ponad 60% graczy zdecydowało się na wybór wysokiego poziomu wysiłku, tj. wartości z przedziału 160–170.

Spróbujmy w tej grze wyznaczyć ryzykowności strategii według zaproponowanego w poprzedniej części sposobu, tj. jako maksymalny żal. Zweryfikujemy tym samym hipotezę, zgodnie z którą ludzie będą wykazywali tendencję do wyboru strategii minimalizującej maksymalny żal.

W pliku Rozdział\_3\_2.xlsxw zakładce „Koordynacja wysiłku” wyznaczamy strategię Wiersza, która charakteryzuje się najniższym maksymalnym żalem. Sposób wyznaczenia maksymalnego żalu jest podobny jak w przypadku gry dylemat podróżnika. W komórce B131 należy wpisać wartość kosztu jednostki wysiłku  $c$  jako liczbę rzeczywistą z przedziału  $(0, 1)$ . Zauważmy, że dla wartości  $c = 0,1$ , strategia, która minimalizuje maksymalny żal to strategia 164. Z kolei dla wartości  $c = 0,9$ , strategia, która minimalizuje maksymalny żal to strategia 116. Hipoteza zatem przez nas postawiona w tym przykładzie też została pomyślnie zweryfikowana.

### 3.7.3. Aplikacja mobilna *Game of Rows*

W powyższych dwóch grach hipoteza postawiona przez nas została pomyślnie zweryfikowana. Rzeczywiście ludzie w eksperymentach wykazują tendencję do wyboru strategii mniej ryzykownych, gdzie ryzykowność jest mierzona za pomocą maksymal-

<sup>11</sup> W tej grze istnieją jeszcze równowagi w strategiach mieszanych.

nego żalu. Jeżeli strategią ryzykowną jest strategia równowagi Nasha, wówczas ludzie mogą nie wybrać strategii równowagi – tak jest na przykład w grze dylemat podróżnika. Jeżeli jest wiele strategii równowagi, ludzie mogą wybrać tę, która jest mniej ryzykowna. Tak jest na przykład w grze Koordynacja wysiłku. Nasza hipoteza działa dobrze w tych dwóch przypadkach. Ale czy jest tak również w innych przypadkach?

Aby to potwierdzić lub sfalsyfikować, trzeba sprawdzić więcej przypadków. W tym celu można przeprowadzać kolejne eksperymenty. Tutaj warto wspomnieć o projekcie realizowanym w ramach badań statutowych przez pracowników Zakładu Wspomagania i Analizy Decyzji. Projekt polega na testowaniu zachowań ludzi w grach i weryfikowaniu hipotez na temat tego zachowania. W ramach tego przedsięwzięcia powstała darmowa aplikacja mobilna *Game of Rows* dostępna w sklepie Google-play<sup>12</sup>, w ramach której zachęcamy do wzięcia udziału w eksperymentach mobilnych z wykorzystaniem gier podobnych do tych analizowanych w niniejszym rozdziale.

Użytkownik aplikacji rozgrywa gry z innymi ludźmi, konkurując o najlepsze miejsce w rankingu graczy. My – naukowcy – otrzymujemy dane do analizy i weryfikowania hipotez naukowych. Taki sposób prowadzenia badań naukowych jest dobrą alternatywą dla tradycyjnych eksperymentów przeprowadzanych w laboratoriach eksperymentalnych. Zachęcamy wszystkich do skorzystania z tej aplikacji i tym sposobem przyczynienia się do poprawy jakości i liczebności danych eksperymentalnych, dzięki którym możemy weryfikować hipotezy naukowe.

### 3.7.4. Narzędzie do znajdowania równowag

Do rozdziału, na stronie internetowej <http://www.sgh.waw.pl/MDwAK>, dołączamy również plik Rozdział\_3\_4.xlsm, który zawiera implementację problemu optymalizacji, który prowadzi do znalezienia **jednej** z równowag Nasha w statycznych grach dwuosobowych. Zaznaczamy, że narzędzie jest przeznaczone do stosowania na własny użytek i na własną odpowiedzialność. Jego zaletą jest implementacja w Excelu. Istnieją również narzędzia do znajdowania **wszystkich** równowag Nasha w prostych grach, np. narzędzie dostępne pod adresem: [banach.lse.ac.uk](http://banach.lse.ac.uk).

<sup>12</sup> Aby dowiedzieć się więcej na temat aplikacji oraz pobrać aplikację ze sklepu Google Play, odwiedź link [www.mlewandowski.waw.pl/game-of-rows](http://www.mlewandowski.waw.pl/game-of-rows).

### 3.8. Zadania .....

#### Zadanie 3.1

Wyznacz najlepsze odpowiedzi graczy w grze dylemat więźnia przedstawionej w Tabeli 3.4, zakreślając wypłaty odpowiednich graczy.

#### Zadanie 3.2

Wyznacz wszystkie równowagi (w strategiach czystych i mieszanych) gry bitwa płci przedstawionej w tabeli 3.20.

Tabela 3.20.

Tabela wypłat gry bitwa płci

	Mecz	Balet
Mecz	(2, 1)	(0, 0)
Balet	(0, 0)	(1, 2)

Źródło: opracowanie własne.

Jeśli jest więcej niż jedna równowaga, wskaż, która równowaga będzie preferowana, jeśli zastosowane zostanie kryterium dominacji w sensie Pareto lub kryterium minimaksu żalu.

#### Zadanie 3.3

Rozważmy grę dwóch pracowników pracujących nad wspólnym projektem z wypłatami przedstawionymi w Tabeli 3.201. W porównaniu do wersji przedstawionej w Tabeli 3.5, tutaj strata pracownika, gdy on pracuje, a gracz drugi udaje jest dodatkowo powiększona o 2 tys. PLN i wynosi –3 tys. PLN. Jakie są równowagi w tej grze? Jeśli jest więcej niż jedna, wskaż tę, która jest lepsza w sensie Pareto (chyba że nie można porównać) oraz tę, w której gracze stosują strategię minimaksu żalu? Czy te dwa kryteria prowadzą do selekcji tej samej równowagi?

Tabela 3.21.

Tabela wypłat gry dwóch pracowników pracujących nad wspólnym projektem: druga wersja

	Pracować (P)	Udawać (U)
Pracować (P)	(2, 2)	(–3, 0)
Udawać (U)	(0, –3)	(0, 0)

Źródło: opracowanie własne.

**Zadanie 3.4<sup>13</sup>**

Rozważmy dwie firmy farmaceutyczne X i Y, które spieszą się, aby jako pierwsi opatentować leki na przeziębienie. Lek A lepiej zmniejsza kaszel, a lek B lepiej obniża gorączkę. Firmy mają sztywny budżet do podziału na wydatki R&D i na marketing. Która firma pierwsza opatentuje lek, zgarnia wszystko. Firma X ma do dyspozycji budżet w wysokości 6 do podziału na badania nad lekiem A i B, a firma Y dysponuje budżetem w wysokości 5. Każda z firm musi przeznaczyć na badania każdego z leków przynajmniej 1 jednostkę budżetu. Strategie firmy X to 51, 42, 33, 24, 15, natomiast strategie firmy Y to 41, 32, 23, 14. Przykładowo strategia 42 firmy X oznacza, że przeznacza ona budżet równy 4 na lek A oraz budżet 2 na lek B. Wypłaty graczy przedstawiono w tabeli 3.22. Wyznacz wszystkie równowagi tej gry.

**Tabela 3.22.**  
**Tabela wypłat gry**

	41	32	23	14
51	4	2	1	0
42	1	3	0	-1
33	-2	2	2	-2
24	-1	0	3	1
15	0	1	2	4

Źródło: opracowanie własne.

**Bibliografia**

1. Avis, D., G. Rosenberg, Savani, R., von Stengel, B. (2010). Enumeration of Nash Equilibria for Two-Player Games, *Economic Theory*, 42, s. 9–37.
2. Binmore, K. (2007a). *Game theory. A very short introduction*. Oxford: Oxford University Press.
3. Binmore, K. (2007b). *Playing for real. A text on game theory*. Oxford: Oxford University Press.
4. Leyton-Brown, K., Shoham, Y. (2008). *Essentials of Game Theory: A Concise, Multidisciplinary Introduction. Synthesis Lectures on Artificial Intelligence and Machine Learning*. Morgan and Claypool.
5. Osborne, M. (2000). *An introduction to game theory*. Oxford: Oxford University Press.
6. Straffin, P. (2001). *Teoria gier*. Warszawa: Scholar.
7. Samuelson, W.F., Marks, S.G. (2009). *Ekonomia menedżerska*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.

<sup>13</sup> Po samodzielnym znalezieniu rozwiązania tego problemu, Czytelnik może je porównać z rozwiązaniem dostępnym w pliku Rozdział\_3\_3.xlsx.

