

одному разу, тоді монети, що знаходяться в кутах трикутника будуть перевернуті по одному разу, монети на бічних сторонах – по три рази, тому усі ці монети будуть лежати гербом донизу. Усі інші будуть перевернуті шість разів і утворять трикутник зі стороною $n-3$.

Покажемо, що при $n \equiv 1 \pmod{3}$ цього зробити неможливо. Від супротивного, припустимо, що це можливо. Розфарбуємо усі монети у три кольори А, Б, В так, щоб у кожному трикутнику з трьох монет усі три монети були різного кольору. В такому випадку кутові монети будуть однакового кольору, припустимо – А. в такому випадку, монет цього кольору буде на 1 більше за монет іншого кольору. За один хід парність різниці у кількості монет, що лежать догори гербом не змінюється. Спочатку різниця непарна, а наприкінці – парна, що неможливо. Одержана суперечність завершує доведення.

8.2. Відповідь: $a \geq b$.

Розв'язання. $a \geq b$, оскільки в кожному з a кругів знаходиться не більше одного центру круга з іншого набору.

9.1. Розв'язання. Оскільки $\angle ADB = \angle ACB$, то чотирикутник $ABCD$ – вписаний. Тому $\angle DCA = \angle ABD = \angle ADB = \angle ACB$.

1 випадок. Точка N лежить на промені CB за точкою B (рис.31). Оскільки $\angle AKB + \angle ANB = 180^\circ$, то ANK – вписаний, тому $\angle ANK = \angle ABK = \angle ACB = \angle 90^\circ - \angle CAN$, звідки $AC \perp KN$.

2 випадок. Точка N лежить на відрізку CB (рис.32). Оскільки $\angle AKB = \angle ANB$, то $AKNB$ – вписаний. Нехай T – точка перетину прямих AC і KN , тоді $\angle CNT + \angle TCN = 180^\circ - \angle KNB + \angle KBA = \angle KBA + \angle KAB = 90^\circ$, тобто $AC \perp KN$.

Випадок $N = B$ очевидний.

9.2. Розв'язання. Нехай D і E – середини сторін AB і AC відповідно. Очевидно, що $DE \parallel BC \parallel KL$ і DO – серединний перпендикуляр до AB . Тому $DO \parallel KM$, аналогічно $OE \parallel LM$ (рис.33). Таким чином гомотетія з центром в точці A , що переводить $E \rightarrow L$ так само переводить $D \rightarrow K$, $O \rightarrow M$, з чого й витікає потрібне.

10. Розв'язання. Занумеруємо учасників: $1, 2, \dots, n$, та розглянемо таке розподілення знайомств.

Для $i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ людина з номером $n-i$ знайома з усіма, крім перших i людей. (n знайомий з усіма, $(n-1)$ – з усіма, окрім 1 і т.д.), $n \rightarrow n-1, n-1 \rightarrow n-2, \dots$

Для $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ – не знайомі між собою, і одержимо: $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, \dots$

Тоді загальна кількість знайомих має вигляд: $1, 2, \dots, k-1, k, k, k+1, k+2, \dots, n-1$, що й треба було показати.

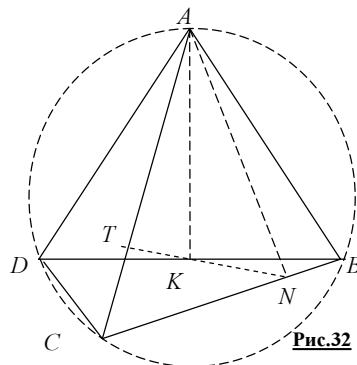


Рис.32

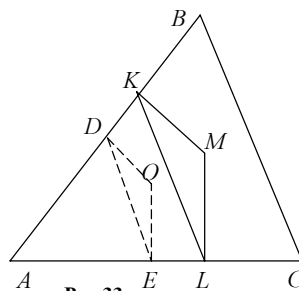


Рис.33